

ANNALES
DE LA
SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE
DE BRUXELLES

ASSOCIATION SANS BUT LUCRATIF

TOME SOIXANTE-SEPTIÈME, 1953

SÉRIE I

**SCIENCES MATHÉMATIQUES,
ASTRONOMIQUES ET PHYSIQUES**

TROISIÈME ET DERNIER FASCICULE

21 DÉCEMBRE 1953



*Publié avec le concours de la Fondation universitaire de Belgique
et du Gouvernement*

LOUVAIN

Secrétariat de la Société Scientifique

11, RUE DES RÉCOLLETS, 11

Chèques postaux 2027.46

1953

Publication trimestrielle. Prix de ce fascicule séparé: 60 frs

AVIS

Les périodiques internationaux de références et de bibliographie sont autorisés à reproduire, moyennant due référence, les résumés que les auteurs placent en tête de leurs travaux dans ces *Annales*.

TABLE DE MATIÈRES

Session du 29 octobre 1953, à Louvain

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

PAGES

Sur des équations intégrodifférentielles récurrentes de forme normale, dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues, par M. R. H. Germay	177
Some basic hypergeometric identities, by R. P. Agarwal	186
Operational calculus with two variables, by N. K. Chakrabarty	203
On some sequences of Laplace transforms, by H. M. Srivastava	218
Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes 2 ^e partie; Fonctions hyperbesséliennes, par M. P. Delerue	229

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

Influence de l'anharmonicité sur le calcul de la fonction potentielle des molécules C_2H_4 et H_2O , par MM. Ch. Manneback et A. Rahman	275
Spectre infra-rouge à grande dispersion de $CH_2=CHD$, par MM. Ch. Courtoy et M. de Hemptinne	285
Spectre infra-rouge à grande dispersion de la molécule CD_2H-CD_2H , par MM. R. Van Riet, Ch. Courtoy et M. de Hemptinne	296
Quelques résultats sur les spectres nucléaires du Rb86 et du Cs137, par M. P. Macq	309
Contrôle par thyatron de l'alimentation en courant continu de l'amplificateur 100 Kw du cyclotron, par MM. L. Gillon et Y. Hecq	318
Table des matières du volume 67 ^e	327

Le prix d'ABONNEMENT aux ANNALES, série I, pour des personnes ne faisant pas partie de la Société scientifique, est fixé comme suit :

en Belgique, au Congo-Belge et au Luxembourg	70 fr.
dans les autres pays	120 fr.

Sciences Mathématiques et Astronomiques

Sur des équations intégral-différentielles récurrentes
de forme normale, dont les termes intégraux
contiennent les dérivées des fonctions inconnues

PAR

R. H. GERMAY

RÉSUMÉ. — Les équations intégral-différentielles récurrentes

$$\frac{dy_n}{dx} = F_n [x, y_n(x), y_{n+1}(x); W_{n1}(x) \dots W_{np}(x)] \quad (n = 1, 2, \dots)$$

où

$$W_{nj}(x) = \int_{x_0}^x f_{nj} [x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); y'_n(s), y'_{n+1}(s)] ds \quad (j = 1, \dots, p)$$

définissent sous des hypothèses convenables (continuité, conditions de Lipschitz) un système unique d'intégrales satisfaisant à des conditions initiales données. La méthode de démonstration employée est celle des approximations successives.

§ 1. THÉORÈME. Désignons par

$$(1) \quad F_1(x, y, z, w_1, \dots, w_p), \dots, F_n(x, y, z, w_1, \dots, w_p), \dots$$

une suite indéfinie de fonctions données et également continues dans le champ de variation

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x_0 \leq x \leq x_0 + a, y_0 - b \leq y \leq y_0 + b, z_0 - b \leq z \leq z_0 + b, (y_0 = z_0) \\ -c_1 \leq w_1 \leq c_1, \dots, -c_p \leq w_p \leq c_p \end{array} \right.$$

les lettres a, b, c représentant des nombres positifs fixes.

Supposons ces fonctions bornées dans leur ensemble; soit M un nombre positif fixe supérieur à leurs modules dans le champ de variation (2).

quand les valeurs de $x, s; u, v, u', v', u^*, v^*, u'^*, v'^*$ appartiennent au champ de variation (6); les lettres L_{j1}, \dots, L_{jp} ($j = 1, \dots, p$), désignent des nombres positifs fixes indépendants du rang n des fonctions considérées.

Ecrivons les équations intégrales-récurrentes

$$(9) \quad \frac{dy_n}{dx} = F_n \left[x, y_n(x), y_{n+1}(x); \int_{x_0}^x f_{n1} \left\{ x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); \frac{dy_n}{ds}, \frac{dy_{n+1}}{ds} \right\} ds, \right. \\ \left. \dots \int_{x_0}^x f_{np} \left\{ x, s; y_n(s), y_{n+1}(s); \frac{dy_n}{ds}, \frac{dy_{n+1}}{ds} \right\} ds \right] \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Elles admettent un et un seul système de solutions $Y_n(x)$ fonctions continues de x définies dans un certain intervalle $(x_0, x_0 + h)$ et prenant en $x = x_0$ la valeur y_0 .

DÉMONSTRATION

§ 2. Choix d'un intervalle et construction de suites indéfinies de fonctions.

Moyennant l'égale continuité des F_n , on peut trouver des nombres positifs fixes α, β, γ tels que pour

$$(10) \quad \begin{cases} x_0 \leq x \leq x_0 + \alpha, & y_0 - \beta \leq y \leq y_0 + \beta, & z_0 - \beta \leq z \leq z_0 + \beta, & (y_0 = z_0) \\ -\gamma \leq w_j \leq \gamma & (j = 1, \dots, p) \end{cases}$$

on ait, quel que soit n ,

$$(11) \quad |F_n(x, y, z; w_1, \dots, w_p) - F_n(x_0, y_0, z_0, 0, \dots, 0)| < \omega$$

Désignons par h un nombre positif inférieur au plus petit des nombres

$$(12) \quad a, \frac{b}{M}, \frac{c_j}{m_j}, \alpha, \frac{\beta}{M}, \frac{\gamma}{m_j}, \quad (j = 1, 2, \dots, p)$$

Supposons dorénavant x et s compris dans l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$

De proche en proche, nous pouvons construire les systèmes indéfinis de fonctions

$$\begin{aligned}
 & y_{n,1}(x) = y_0 \\
 & + \int_{x_0}^x F_n[t; y_0, y_0; \int_{x_0}^t f_{n,1}\{t, s; y_0, y_0; r_0, r_0\} ds, \dots \int_{x_0}^t f_{n,p}\{t, s; y_0, y_0; r_0, r_0\} ds] dt \\
 & \frac{dy_{n,1}}{dx} \\
 & = F_n[x; y_0, y_0; \int_{x_0}^x f_{n,1}\{x, s; y_0, y_0; r_0, r_0\} ds, \dots \int_{x_0}^x f_{n,p}\{x, s; y_0, y_0; r_0, r_0\} ds] \\
 & (n = 1, 2, 3, \dots)
 \end{aligned}
 \tag{13_1}$$

$$\begin{aligned}
 & y_{n,\mu+1}(x) = y_0 \\
 & + \int_{x_0}^x F_n \left[t; y_{n,\mu}(t), y_{n+1,\mu}(t); \int_{x_0}^t f_{n,1} \left\{ t, s; y_{n,\mu}(s), y_{n+1,\mu}(s); \frac{dy_{n,\mu}}{ds}, \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} \right\} ds, \right. \\
 & \quad \left. \dots \int_{x_0}^t f_{n,p} \left\{ t, s; y_{n,\mu}(s), y_{n+1,\mu}(s); \frac{dy_{n,\mu}}{ds}, \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} \right\} ds \right] \\
 & \frac{dy_{n,\mu+1}}{dx} \\
 & = F_n \left[x; y_{n,\mu}(x), y_{n+1,\mu}(x); \int_{x_0}^x f_{n,1} \left\{ x, s; y_{n,\mu}(s), y_{n+1,\mu}(s); \frac{dy_{n,\mu}}{ds}, \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} \right\} ds, \right. \\
 & \quad \left. \dots \int_{x_0}^x f_{n,p} \left\{ x, s; y_{n,\mu}(s), y_{n+1,\mu}(s); \frac{dy_{n,\mu}}{ds}, \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} \right\} ds \right]
 \end{aligned}
 \tag{13_{\mu+1}}$$

Les symboles $y_{n,\mu}(x)$ ont un sens pour les valeurs de x considérées; ils représentent des fonctions également continues dont les valeurs oscillent dans l'intervalle $(y_0 - b, y_0 + b)$ quand x appartient à l'intervalle $(x_0, x_0 + h)$.

§ 3. Convergence uniforme des suites

$$(14) \left\{ \begin{array}{l} y_0, y_n(x), \dots y_{n,\mu}(x), \dots \\ \frac{dy_n}{dx}, \dots \frac{dy_{n,\mu}}{dx}, \dots \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Au lieu des suites (14), nous considérons les séries

$$(15) \left\{ \begin{array}{l} y_0 + \{y_{n,1}(x) - y_0\} + \{y_{n,2}(x) - y_{n,1}(x)\} + \dots + \{y_{n,\mu+1}(x) - y_{n,\mu}(x)\} + \dots \\ \frac{dy_{n,1}}{dx} + \left\{ \frac{dy_{n,2}}{dx} - \frac{dy_{n,1}}{dx} \right\} + \dots + \left\{ \frac{dy_{n,\mu+1}}{dx} - \frac{dy_{n,\mu}}{dx} \right\} + \dots \end{array} \right. \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Ces séries sont absolument et uniformément convergentes, quel que soit n , lorsque μ augmente indéfiniment.

Les formules générales (13 _{$\mu+1$}) jointes aux conditions de Lipschitz (3) et (8) permettent d'écrire, tous calculs faits, les inégalités suivantes

$$(16) \quad |y_{n,\mu+1}(x) - y_{n,\mu}(x)| < P \int_{x_0}^x \{ |y_{n,\mu}(t) - y_{n,\mu-1}(t)| + |y_{n+1,\mu}(t) - y_{n+1,\mu-1}(t)| \} dt$$

$$+ Q \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t \left\{ |y_{n,\mu}(s) - y_{n,\mu-1}(s)| + |y_{n+1,\mu}(s) - y_{n+1,\mu-1}(s)| + \left| \frac{dy_{n,\mu}}{ds} - \frac{dy_{n,\mu-1}}{ds} \right| + \left| \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} - \frac{dy_{n+1,\mu-1}}{ds} \right| \right\} ds$$

$$(17) \quad \left| \frac{dy_{n,\mu+1}}{dx} - \frac{dy_{n,\mu}}{dx} \right| < P \{ |y_{n,\mu}(x) - y_{n,\mu-1}(x)| + |y_{n+1,\mu}(x) - y_{n+1,\mu-1}(x)| \}$$

$$+ Q \int_{x_0}^x \left\{ |y_{n,\mu}(s) - y_{n,\mu-1}(s)| + |y_{n+1,\mu}(s) - y_{n+1,\mu-1}(s)| + \left| \frac{dy_{n,\mu}}{ds} - \frac{dy_{n,\mu-1}}{ds} \right| + \left| \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} - \frac{dy_{n+1,\mu-1}}{ds} \right| \right\} ds$$

($n = 1, 2, 3, \dots$)

Dans ces formules, P désigne le plus grand des nombres H_1, H_2 et A le plus grand des nombres

$$K_1 L_{1,1} + \dots + K_p L_{p,1}, \dots K_1 L_{1,4} + \dots K_p L_{p,4}$$

On a directement, quel que soit n ,

$$(18) \quad |y_{n,1}(x) - y_o| < M(x - x_o), \quad \left| \frac{dy_{n,1}}{dx} - \frac{dy_o}{dx} \right| < M$$

En faisant $\mu = 1$ dans les formules (16) et (17), on trouve de suite

$$(19) \quad |y_{n,2}(x) - y_{n,1}(x)| < 2M(P + Q + aQ) \frac{(x - x_o)^2}{2!}$$

$$(20) \quad \left| \frac{dy_{n,2}}{dx} - \frac{dy_{n,1}}{dx} \right| < 2M(P + Q + aQ) \frac{x - x_o}{1!}$$

L'inspection des formules (18), (19), (20) nous conduit à penser que

$$(21) \quad |y_{n,\mu}(x) - y_{n,\mu-1}(x)| < A_\mu \frac{(x - x_o)^\mu}{\mu!}$$

$$(22) \quad \left| \frac{dy_{n,\mu}}{dx} - \frac{dy_{n,\mu-1}}{dx} \right| < A_\mu \frac{(x - x_o)^{\mu-1}}{\mu - 1!}$$

A_μ désignant un nombre positif fixe.

Ces formules sont générales. En effet, si on les admet provisoirement, les inégalités (16), (17) nous donnent après quelques transformations analogues à celles qui ont été détaillées dans plusieurs articles antérieurs rappelés à la fin de cette note

$$(23) \quad |y_{n,\mu+1}(x) - y_{n,\mu}(x)| < A_{\mu+1} \frac{(x - x_o)^{\mu+1}}{\mu + 1!}$$

$$(24) \quad \left| \frac{dy_{n,\mu+1}}{dx} - \frac{dy_{n,\mu}}{dx} \right| < A_{\mu+1} \frac{(x - x_o)^\mu}{\mu!}$$

moyennant

$$(25) \quad A_{\mu+1} = 2(P + Q + aQ) A_\mu$$

En définitive

$$(26) \quad |y_{n,\mu}(x) - y_{n,\mu-1}(x)| < M \cdot 2^{\mu-1} \cdot [P + (a+1)Q]^{\mu-1} \cdot \frac{(x - x_o)^\mu}{\mu!}$$

$$(27) \quad \left| \frac{dy_{n,\mu}}{dx} - \frac{dy_{n,\mu-1}}{dx} \right| < M \cdot 2^{\mu-1} [P + (a+1)Q]^{\mu-1} \cdot \frac{(x - x_o)^{\mu-1}}{\mu - 1!}$$

Ceci établit la convergence absolue et uniforme des séries (15) et dès lors, la convergence uniforme des suites (14) vers des fonctions continues $Y_n(x)$ et vers leurs dérivées $\frac{dY_n}{dx}$.

En passant alors à la limite pour $\mu \rightarrow \infty$ dans les deux membres des égalités $(13_{\mu+1})$, on voit que ces fonctions $Y_n(x)$ satisfont aux équations intégral-différentielles (9). Elles satisfont d'autre part aux conditions initiales indiquées dans l'énoncé.

§ 4. Unicité du système de solutions $Y_n(x)$

Imaginons un instant qu'il existe un système de solutions $Y_n^*(x)$ distinctes des intégrales $Y_n(x)$ mais jouissant des mêmes propriétés. Nous aurions les identités.

$$(28) \quad Y_n^*(x) = y_0 + \int_{x_0}^x F_n \left[t; Y_n^*(t), Y_{n+1}^*(t); \int_{x_0}^t f_{n,1} \left\{ t, s; Y_n^*(s), Y_{n+1}^*(s); \frac{dY_n^*}{ds}, \frac{dY_{n+1}^*}{ds} \right\} ds; \right. \\ \left. \dots \int_{x_0}^t f_{n,p} \left\{ t, s; Y_n^*(s), Y_{n+1}^*(s); \frac{dY_n^*}{ds}, \frac{dY_{n+1}^*}{ds} \right\} ds \right] dt$$

$$(29) \quad \frac{dY_n^*}{dx} = F_n \left[x; Y_n^*(x), Y_{n+1}^*(x); \int_{x_0}^x f_{n,1} \left\{ x, s; Y_n^*(s), Y_{n+1}^*(s); \frac{dY_n^*}{ds}, \frac{dY_{n+1}^*}{ds} \right\} ds; \right. \\ \left. \dots \int_{x_0}^x f_{n,p} \left\{ x, s; Y_n^*(s), Y_{n+1}^*(s); \frac{dY_n^*}{ds}, \frac{dY_{n+1}^*}{ds} \right\} ds \right] \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

En les combinant avec les équations $(13_{\mu+1})$ et les conditions de Lipschitz (3) et (8), nous obtiendrions

$$(30) \quad |Y_n^*(x) - y_{n,\mu+1}(x)| < P \int_{x_0}^x \{ |Y_n^*(t) - y_{n,\mu}(t)| + |Y_{n+1}^*(t) - y_{n+1,\mu}(t)| \} dt \\ + Q \int_{x_0}^x dt \int_{x_0}^t \left\{ |Y_n^*(s) - y_{n,\mu}(s)| + |Y_{n+1}^*(s) - y_{n+1,\mu}(s)| \right. \\ \left. + \left| \frac{dY_n^*}{ds} - \frac{dy_{n,\mu}}{ds} \right| + \left| \frac{dY_{n+1}^*}{ds} - \frac{dy_{n+1,\mu}}{ds} \right| \right\} ds, \text{ etc.} \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Nous en déduirions alors comme ci-dessus que

$$(31) \quad \lim_{\mu \rightarrow \infty} y_{n,\mu}(x) = Y_n^*(x) = Y_n(x), \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

Le théorème annoncé est complètement démontré.

§ 5. *Remarques.* a) Les équations intégral-différentielles récurrentes étudiées ci-dessus comportent évidemment comme cas particulier celui où les termes intégraux sont des intégrales de Stieltjes ayant pour fonctions déterminantes les fonctions inconnues.

b) Le théorème s'applique immédiatement aux équations intégral-différentielles récurrentes

$$(32) \quad \frac{d\eta_n}{dx} = F_n \left[x, \eta_n(x), \eta_{n+1}(x); \int_{x_0}^x f_{n,1} \left\{ s, x; \eta_n(s), \eta_{n+1}(s); \frac{d\eta_n}{ds}, \frac{d\eta_{n+1}}{ds} \right\} ds; \right. \\ \left. \dots \int_{x_0}^x f_{n,p} \left\{ s, x; \eta_n(s), \eta_{n+1}(s), \frac{d\eta_n}{ds}, \frac{d\eta_{n+1}}{ds} \right\} ds \right] \\ (n = 1, 2, 3, \dots)$$

que l'on déduit des équations proposées en intervertissant sous les signes fonctionnels $f_{n,j}$ les rôles de x et de s en dehors des inconnues et de leurs dérivées. On peut convenir de dire que ces équations sont associées aux équations (9). Leurs solutions $Y_n(x)$ dont l'existence, la continuité et l'unicité sont assurées par la proposition précédente seront elles-mêmes dites associées aux fonctions $Y_n(x)$.

BIBLIOGRAPHIE

1. L. BRUWIER : Sur une classe d'équations récurro-différentielles (*Mémoires in 8° de la Société royale des Sciences de Liège, 3^e série, t. XVII, 1932, § 18, p. 43*).
2. R. H. GERMAY. — Sur une équation intégral-différentielle et sur une généralisation d'un théorème de Lindelöf (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège, t 1, 1932, p. 233*).
3. id. — Application de la méthode des approximations successives au calcul de l'intégrale d'une équation intégral-différentielle (*id, 1933, pp. 51-57*).
4. id. — Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégral-différentielles (*id, 1933, pp. 78-83*).
5. id. — Sur l'existence des solutions de certaines équations intégral-différentielles à une variable indépendante et sur une généralisation du théorème de E. Lindelöf (*Revista matematica hispano-americana, 1933*).

6. id. — Sur l'existence de la solution d'une équation intégral-différentielle où les termes intégraux sont des intégrales de Stieltjes dont la fonction déterminante est l'inconnue de l'équation elle-même (*Actas de l'Academia Nacional de Ciencias Exactas, Fisicas y Naturales de Lima*, 1933).
7. id. — Sur les systèmes d'équations intégral-différentielles contenant des intégrales de Stieltjes dont les fonctions déterminantes sont les inconnues des équations proposées (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1934, pp. 94-98, 122-126).
8. id. — Généralisation du théorème d'existence des solutions des systèmes d'équations intégral-différentielles contenant des intégrales de Stieltjes dont les fonctions déterminantes sont les solutions des équations proposées (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1934, pp. 155-159).
9. id. — Sur des équations intégral-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent la dérivée de l'inconnue (*Bull. Soc. roy. des Sc. de Liège*, 1934, pp. 127-132).
10. id. — Sur des systèmes d'équations intégral-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues (*id.*, 1934, pp. 191-195).
11. id. — Sur une application de la méthode des approximations successives à l'intégration des équations intégral-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent la dérivée de l'inconnue (*id.*, 1934, pp. 196-200, 216-219; 1935, pp. 1-6).
12. id. — Sur une application de la méthode des approximations successives à l'intégration des systèmes d'équations intégral-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent les dérivées des inconnues (*id.*, 1935, pp. 39-44, 109-113, 153-155).
13. L. BRUWIER. — Sur les équations intégral-différentielles normales dont les termes intégraux contiennent la dérivée de la fonction inconnue, (*id.*, 1935, pp. 119-124, pp. 217-219).
14. R. H. GERMAY. — Sur des équations intégral-différentielles récurrentes (*Bull. Soc. roy. de Sc. de Liège*, 1949, pp. 250-258).
15. J. SEGERS. — Sur l'application de la méthode des approximations successives à une classe d'équations récurro-différentielles (*id.*, 1950, pp. 267-276).
16. id. — Sur les dérivées d'ordre supérieur des intégrales d'une équation récurro-différentielle (*id.*, 1951, pp. 114-119).
17. R. H. GERMAY. — Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certaines équations intégral-différentielles récurrentes (*Annales de la Société scientifique de Bruxelles*, t. 66, 1952, Série I, pp. 125-130).
18. id. — Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certains systèmes d'équations intégral-différentielles récurrentes (*id.*, t. 67, 1953, Série I, pp. 13-18).
19. id. — Sur l'intégration, par la méthode des approximations successives, des systèmes normaux d'équations intégral-différentielles récurrentes, (*Bull. Soc. Roy. des Sc. de Liège*, 1953, pp. 131-138).

Saive, le 8 septembre 1953.

Some basic hypergeometric identities

BY

R. P. AGARWAL

1. INTRODUCTION AND NOTATION. A number of basic hypergeometric identities have been given some years back by Jackson (4), (5). These identities are the basic generalisation of some identities given earlier by Burchsnall and Chaundy (1), (2). The object of this paper is to give some more basic hypergeometric identities analogous to those given by Chaundy (3) for ordinary hypergeometric functions. Since basic hypergeometric functions are of some importance in the theory of numbers and combinatory analysis I think it worthwhile putting these general identities on record.

The identities deduced in §§ 3-4 are simple expansions for the ordinary basic functions ${}_2\Phi_1$ and those deduced in §§ 5-7 involve basic hypergeometric functions of two variables and functions of higher order given by Jackson (4). In § 8 some interesting particular cases of these results have been noted. Finally, in § 9 a formal expansion giving a generating function for a basic polynomial sequence has been derived.

The notation used throughout this paper is similar to that given by Jackson in his papers. Thus

$$(a)_n = (1 - q^a) (1 - q^{a+1}) \dots (1 - q^{a+n-1}), \quad |q| < 1,$$

$$(\delta)_n = (1 - q^\delta) (1 - q^{\delta+1}) \dots (1 - q^{\delta+n-1})$$

with similar expression for $(\delta')_n$, where $\delta, \delta' \equiv x \frac{\partial}{\partial x}, y \frac{\partial}{\partial y}$ and $q^\delta = \exp (\delta \log q)$ and $q^{\delta'} = \exp (\delta' \log q)$.

$$\Pi \left(\begin{matrix} a, b \\ c, d \end{matrix} \right) = \prod_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - q^{a+n}) (1 - q^{b+n})}{(1 - q^{c+n}) (1 - q^{d+n})}, \text{ and so on in general.}$$

The basic hypergeometric functions of two variables are defined as *

* Following Jackson the functions in whose series definition there is a factor of the type $q^{\lambda n(n-1)}$ will be called « abnormal » functions. For $\lambda = 0$, we shall call the functions « normal ».

$$\Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y; \lambda] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(1)_m (1)_n (c)_{m+n}} x^m y^n q^{\lambda n(n-1)},$$

$$\Phi^{(2)}[a; b, b'; c, c'; x, y; \lambda] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_m (b')_n}{(1)_m (1)_n (c)_m (c')_n} x^m y^n q^{\lambda n(n-1)},$$

$$\Phi^{(3)}[a, a'; b, b'; c; x, y; \lambda] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_m (a')_n (b)_m (b')_n}{(1)_m (1)_n (c)_{m+n}} x^m y^n q^{\lambda n(n-1)},$$

$$\Phi^{(4)}[a, b; c, c'; x, y; \lambda] = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(a)_{m+n} (b)_{m+n}}{(1)_m (1)_n (c)_m (c')_n} x^m y^n q^{\lambda n(n-1)}.$$

The confluent forms are also defined as given by Jackson (5).

2. I give below some fundamental transformations and results which will be used frequently in the paper. They have been proved fully by Jackson.

$$(2.1) \quad (-\delta)_r (-\delta')_r \frac{x^m y^n}{(1)_m (1)_n} = \frac{(-m)_r (-n)_r}{(1)_m (1)_n} x^m y^n = \frac{q^{r(r-m-n-1)}}{(1)_{m-r} (1)_{n-r}} x^m y^n.$$

$$(2.2) \quad (1-h-\delta-\delta')_r x^m y^n = (-)^r x^m y^n (h+m+n-r)_r q^{-r(h+m+n)+\frac{1}{2}r(r+1)},$$

$$(2.3) \quad \{(\delta+c)_r\}^{-1} \Phi[a, b; c; x] = \{(c)_r\}^{-1} \Phi[a, b; c+r; x],$$

$$(2.4) \quad \nabla(h) \equiv \Pi \left(\begin{matrix} \delta+h, & \delta'+h \\ h, & h+\delta+\delta' \end{matrix} \right) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (h)_r} q^{r(\delta+\delta'+h)},$$

and its inverse

$$(2.5) \quad \Delta(h) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (1-h-\delta-\delta')_r} q^r$$

$$(2.6) \quad = \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \frac{(h)_{2r} (-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (h+r-1)_r (h+\delta)_r (h+\delta')_r} q^{\frac{1}{2}r(r-1)+r(\delta+\delta'+h)}.$$

Also

$$(2.7) \quad \nabla(h) \Delta(k) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(k)_{2r} (k-h)_r (-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (k+r-1)_r (k+\delta)_r (k+\delta')_r (h)_r} q^{r(\delta+\delta'+h)}$$

$$(2.8) \quad = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(h-k)_r (-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (h)_r (1-k-\delta-\delta')_r} q^r.$$

$$(2.9) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] = \nabla(a) \Phi^{(3)}[a, a; b, b'; c; x, y], \\ \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] = \nabla(a) \Delta(c) \Phi[a, b; c; x] \Phi[a, b'; c; y], \\ \Phi^{(3)}[a, a'; b, b'; c; x, y] = \Delta(c) \Phi[a, b; c; x] \Phi[a', b'; c; y]. \end{array} \right.$$

3. We begin with the following two simple identities giving the expansions of a ${}_2\Phi_1$, in terms of another ${}_2\Phi_1$, namely

$$(3.1) \quad \Phi \left[\begin{matrix} A, B; x \\ C, \end{matrix} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (a)_r (b)_r}{(1)_r (c)_r} {}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} A, B, c, -r; q \\ a, b, C, \end{matrix} \right] x^r q^{\frac{1}{2}r(r-1)} \\ \times \Phi [a + r, b + r; c + r; x],$$

$$(3.2) \quad \Phi \left[\begin{matrix} A, B; x \\ C, \end{matrix} \right] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (a)_r (b)_r}{(1)_r (c+r-1)_r} x^r q^{\frac{1}{2}r(r-1)} {}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} A, B, c+r-1, -r; q \\ a, b, C, \end{matrix} \right] \\ \times \Phi [a + r, b + r; c + 2r; x].$$

The proof of (3.1) and (3.2) depends upon the following two lemmas.

Lemma 1.

$$(3.3) \quad \sum_{s=0}^R (-)^s \frac{q^{\frac{1}{2}s(s-1)}}{(1)_{R-s} (1)_s} = \begin{cases} 0 & (R > 0), \\ 1 & (R = 0). \end{cases}$$

Proof. The left hand side of (3.3) can be written as

$$\frac{1}{(1)_R} {}_1\Phi_0 [-R; q^R].$$

This, by the basic analogue of Vandermonde's theorem (*), can be shown to give the desired lemma.

Lemma 2.

$$(3.4) \quad \sum_{s=0}^R (-)^s \frac{q^{\frac{1}{2}s(s-1)}}{(1)_s (1)_{R-s} (c+2s)_{R-s} (c+s-1)_s} = \begin{cases} 0 & (R > 0), \\ 1 & (R = 0). \end{cases}$$

Proof. We have the left hand side of (3.4) equal to

$$\sum_{s=0}^R (-)^s \frac{q^{\frac{1}{2}s(s-1)} (1 - q^{c+2s-1})}{(1)_s (1)_{R-s} (c+s-1)_{R+1}} \\ = \frac{1}{(1-q^R)} \sum_{s=0}^R (-)^s q^{\frac{1}{2}s(s-1)} \frac{\{q^s(1-q^{R-s})(1-q^{c+s-1}) + (1-q^s)(1-q^{c+s+R-1})\}}{(1)_s (1)_{R-s} (c+s-1)_{R+1}} \\ = \frac{1}{(1-q^R)} \left[\sum_{s=0}^{R-1} \frac{(-)^s q^{\frac{1}{2}s(s+1)}}{(1)_s (1)_{R-s-1} (c+s)_R} - \sum_{s=1}^R \frac{(-)^{s-1} q^{\frac{1}{2}s(s-1)}}{(1)_{s-1} (1)_{R-s} (c+s-1)_R} \right].$$

This evidently vanishes identically for all $R > 0$. This proves the lemma.

* BAILEY : Cambridge Tract on « Generalised Hypergeometric Series » a particular case of 8.4(3). It will be henceforth referred to as « Tract » only.

Now, to prove (3.1) we find that the coefficient of

$$(3.5) \quad \frac{(A)_n (B)_n (c)_n}{(a)_n (b)_n (C)_n (1)_n} q^n$$

on the right hand side is

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-1)^r (a)_r (b)_r (-r)_n}{(1)_r (c)_r} x^r q^{\frac{1}{2}r(r-1)} \Phi[a+r, b+r; c+r; x].$$

Granted absolute convergence we can rearrange this as

$$\sum_{R=0}^{\infty} \frac{(a)_R (b)_R}{(c)_R} x^R \sum_{r=n}^R (-1)^{r+n} \frac{q^{\frac{1}{2}n(n-1) + \frac{1}{2}r(r-1) - rn}}{(1)_{R-r} (1)_{r-n}}.$$

The inner sum is equal to q^{-n} by Lemma 1, for $R = n$ and otherwise is zero.

Hence the coefficient of (3.5) is simply $(a)_n (b)_n x^n q^{-n} / (c)_n$, which proves (3.1).

Similarly, to prove (3.2) we collect the coefficient of $(A)_n (B)_n q^n / (a)_n (b)_n (C)_n (1)_n$ on the right of (3.2) and proceeding as above get the result on applying Lemma 2.

4. If in (3.2) we suppose

$$A + B - C = a + b - c.$$

and change a, b, A, B and x to $c-a, c-b, C-A, C-B$ and xq^{A+B-C} ($= xq^{a+b-c}$) respectively, we can use the following well-known identity

$$(4.1) \quad {}_2\Phi_1[a, b; c; x] = \Pi \frac{(1 - xq^{a+b-c+n})}{(1 - xq^n)} {}_2\Phi_1[c-a, c-b; c; xq^{a+b-c}]$$

to replace the ${}_2\Phi_1$ functions on both sides of (3.2) to get

$$(4.2) \quad \left\{ \begin{aligned} {}_2\Phi_1[A, B; C; x] &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a)_r (c-b)_r}{(1)_r (c+r-1)_r} (-x)^r q^{r(a+b-c) + \frac{1}{2}r(r-1)} \\ &\times {}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} C-A, C-B, c+r-1, -r; q \end{matrix} \right] \Phi \left[\begin{matrix} a+r, b+r; x \\ c+2r \end{matrix} \right]. \end{aligned} \right.$$

This gives an alternative form for (3.2).

Again putting $A, B, C = a, b+h$, and $c+h$ respectively in (3.2),

the ${}_4\Phi_3$ on the right reduces to a ${}_3\Phi_2$, which can be summed by the basic analogue of Saalschütz's theorem* to give

$$(4.3) \quad {}_2\Phi_1[a, b+h; c+h; x] = \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \frac{(a)_r (c-b)_r (-h)_r}{(1)_r (c+r-1)_r (c+h)_r} x^r q^{r(b+h) + \frac{1}{2}r(r-1)} \times \\ \Phi[a+r, b+r; c+2r; x].$$

5. Basic Hypergeometric functions of two variables.

Now, we shall prove the following four identities which involve the basic hypergeometric functions defined in § 1 and functions of higher order, similar to those defined by Jackson (4). The following are the four expansions :

$$(5.1) \quad \Phi^{(1)}[A; B, B'; C; x, y; \lambda] = \\ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^{r+s} (a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(1)_r (1)_s (c)_{r+s}} x^r y^s q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)} \times \\ \Phi \left[\begin{matrix} A, c : B, -r; B', -s; \\ a, C : b; b'; \end{matrix} q, q; \lambda \right] \times \\ \Phi^{(1)}[a+r+s; b+r, b'+s; c+r+s; x, y];$$

$$(5.2) \quad \Phi^{(2)}[A; B, B'; C, C'; x, y; \lambda] = \\ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^{r+s} (a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(1)_r (1)_s (c)_r (c')_s} x^r y^s q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)} \times \\ \Phi \left[\begin{matrix} A : B, c, -r; B', c', -s; \\ a : b, C; b', C'; \end{matrix} q, q; \lambda \right] \times \\ \Phi^{(2)}[a+r+s; b+r, b'+s; c+r, c'+s; x, y];$$

$$(5.3) \quad \Phi^{(3)}[A, A'; B, B'; C; x, y; \lambda] = \\ \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^{r+s} (a)_r (a')_s (b)_r (b')_s}{(1)_r (1)_s (c)_{r+s}} x^r y^s q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)} \times \\ \Phi \left[\begin{matrix} c : A, B, -r; A', B', -s; \\ C : a, b; a', b'; \end{matrix} q, q; \lambda \right] \times \\ \Phi^{(3)}[a+r, a'+s; b+r, b'+s; c+r+s; x, y];$$

* Tract 8.4(1).

$$\begin{aligned}
 & \Phi^{(4)}[A, B; C, C'; x, y; \lambda] = \\
 (5.4) \quad & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^{r+s} (a)_{r+s} (b)_{r+s}}{(1)_r (1)_s (c)_r (c')_s} x^r y^s q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)} \times \\
 & \Phi \left[\begin{matrix} A, B : c, -r; c', -s; \\ a, b : C; C'; \end{matrix} q, q; \lambda \right] \times \\
 & \Phi^{(4)}[a+r+s, b+r+s; c+r, c'+s; x, y].
 \end{aligned}$$

In (5.1),

$$\Phi \left[\begin{matrix} A, c : B, -r; B', -s; \\ a, C : b; b'; \end{matrix} q, q; \lambda \right]$$

denotes the double hypergeometric series

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(A)_{m+n} (c)_{m+n} (B)_m (-r)_m (B')_n (-s)_n}{(1)_m (1)_n (a)_{m+n} (C)_{m+n} (b)_m (b')_n} q^m q^n q^{\lambda n(n-1)}.$$

So, in the other 'coefficient' Φ 's, the colons mark off the 'double' parameters (i.e. those occurring with suffix $m+n$), the semicolons the 'simple' parameters (occurring with suffix m or n). Thus, the pattern of the above four formulae is quite clear.

The above identities are interesting in the sense that they express an « abnormal » function in a series of the « normal » function of the same type. For $\lambda = \frac{1}{2}$, the left hand functions become similar to those studied by Jackson (4).

We shall only prove the first of these formulae (5.1) and the rest follow by a similar procedure.

Proof of (5.1). The coefficient of

$$\frac{(A)_{m+n} (c)_{m+n} (B)_m (B')_n}{(a)_{m+n} (C)_{m+n} (b)_m (b')_n} q^m q^{n+\lambda n(n-1)}$$

on the right hand side is

$$\begin{aligned}
 & \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-)^{r+s} (a)_{r+s} (b)_r (b')_s}{(1)_r (1)_s (c)_{r+s}} x^r y^s q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1)} (-r)_m (-s)_n \\
 & \times \Phi^{(1)}[a+r+s; b+r, b'+s; c+r+s; x, y].
 \end{aligned}$$

This, granted absolute convergence can easily be written in the form

$$\sum_{R=0}^{\infty} \sum_{S=0}^{\infty} \frac{(a)_{R+S} (b)_R (b')_S}{(c)_{R+S}} x^R y^S \sum_{r=m}^R \sum_{s=n}^S \frac{(-)^{r+s+m+n} q^{\frac{1}{2}r(r-1) + \frac{1}{2}s(s-1) + \frac{1}{2}m(m-1) + \frac{1}{2}n(n-1) - sn - rm}}{(1)_{R-r} (1)_{S-s} (1)_{r-m} (1)_{s-n}}$$

The value of the inner sum is found on simplification and a consequent double application of Lemma 1. It is zero for $R > 0$, $S > 0$ and is q^{-m-n} when $R = m$ and $S = n$. Hence we get the required result as in (3.1).

6. In this section we will consider some expansions involving the basic hypergeometric functions of two variables and generalised basic hypergeometric functions. They differ both in nature and method of proof from the foregoing expansions. We shall prove the following identities (*)

$$\begin{aligned}
 (6.1) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)(1-yq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})(1-yq^{a+b'-c+n})} \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \frac{(c-b-b')_r (a)_r (c-a)_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{r(a+b+b'-c) + \frac{1}{2}r(r-1)} x^r y^r \times \\ & \quad \Phi^{(1)}[c-a+r; c-b+r, c-b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{a+b'-c}], \end{aligned} \right. \\
 (6.2) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Phi^{(3)}[a, a'; b, b'; c; x, y] \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)_r (a')_r (b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{r(a+b) + r(r-1)} x^r y^r \times \\ & \quad \Phi^{(3)}[c-a+r, a'+r; c-b+r, b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, y], \end{aligned} \right. \\
 (6.3) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)(1-yq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})(1-yq^{a+b'-c+n})} \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a)_r (c-b)_r (c-b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{r(a+b+b'-c) + r(r-1)} x^r y^r {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} c-b-b', -r, a; q \\ c-b, c-b' \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \Phi^{(3)}[c-a+r, c-a+r; c-b+r, c-b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{a+b'-c}], \end{aligned} \right. \\
 (6.4) \quad & \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)(1-yq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})(1-yq^{a+b'-c+n})} \Phi^{(3)}[a, a; b, b'; c; x, y] \\ & = \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \frac{(a)_r (c-a)_r (c-b-b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{r(a+b+b'-c) + \frac{1}{2}r(r-1)} x^r y^r \times \\ & \quad \times {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} b, b', -r; q \\ c-a, 1-r+b+b'-c \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \Phi^{(1)}[c-a+r; c-b+r, c-b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{a+b'-c}], \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

* All products unless, otherwise mentioned, are taken from $n = 0$ to ∞ .

$$(6.5) \left\{ \begin{aligned} & \prod \frac{(1 - xq^n)}{(1 - xq)^{a+b-c+n}} \Phi^{(3)}[a, c-a; b, b'; c; x, y] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} (-)^r \frac{(c-a)_r (a)_r (b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{rb + \frac{1}{2}r(r-1)} x^r y^r \\ & \quad \times \Phi^{(1)}[c-a+r; c-b+r, b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, y], \end{aligned} \right.$$

$$(6.6) \left\{ \begin{aligned} & \prod \frac{(1 - xq^n)}{(1 - xq^{a+b-c+n})} \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a)_r (a)_r (b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{ra+r(r-1)} x^r y^r \\ & \quad \times \Phi^{(3)}[c-a+r, a+r; c-b+r, b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, y], \end{aligned} \right.$$

$$(6.7) \left\{ \begin{aligned} & \prod \frac{(1 - xq^n)(1 - yq^n)}{(1 - xq^{a+b-c+n})(1 - yq^{a'+b'-c+n})} \Phi^{(3)}[a, a'; b, b'; c; x, y] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a)_r (c-b)_r (c-a'-b')_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{r(a+a'+b+b'-c)+r(r-1)} x^r y^r \times \\ & \quad \times {}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} c-a-b, a', b', -r; \\ c-a, c-b, 1-r+a'+b'-c, q \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \Phi^{(2)}[c-a+r, c-a'+r; c-b+r, c-b'+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{a'+b'-c}]. \end{aligned} \right.$$

Proof of (6.1). Consider the following identity due to Jackson (*) (4; 37)

$$(6.8) \quad \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (b')_r (c-a)_r}{(1)_r (c+r-1)_r (c)_{2r}} q^{ra+r(r-1)} x^r y^r \times \\ \Phi[a+r, b+r; c+2r; x] \Phi[a+r, b'+r; c+2r; y].$$

Using (4.1) to replace the Φ 's on the right we get

$$(6.9) \quad \prod \frac{(1 - xq^n)(1 - yq^n)}{(1 - xq^{a+b-c+n})(1 - yq^{a+b'-c+n})} \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y] \\ = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (b)_r (b')_r (c-a)_r q^{ra+r(r-1)} x^r y^r \Phi[c-a+r, c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}]}{(1)_r (c+r-1)_r (c)_{2r}} \\ \times \Phi[c-a+r, c-b'+r; c+2r; yq^{a+b'-c}].$$

* There is a misprint in Jackson's result. The solitary quadratic factor in the series on the right should be $q^{ra+r(r-1)}$ and not $q^{rc+3/2r(r-1)}$.

The series on the right of (6.9) is symbolically equal to

$$(6.10) \left\{ \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c)_{2r} (a)_r (b)_r (b')_r (-\delta)_r (-\delta')_r}{(1)_r (c+r-1)_r (c-a)_r (c-b)_r (c+b')_r (c+\delta)_r (c+\delta')_r} q^{r(\delta+\delta'+2c-a-b)} \right. \\ \left. \times \Phi[c-a, c-b; c; xq^{a+b-c}] \Phi[c-a, c-b'; c; yq^{a+b'-c}] \right.$$

provided one of the numerator parameters δ or δ' is a positive integer. Using a formula due to Watson (Tract 8.5(2)) the operator in (6.10) can be transformed into a ${}_4\Phi_3$ to give

$${}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} c-b-b', a, -\delta, -\delta'; \\ c-b, c-b', 1-\delta-\delta'+a-c, q \end{matrix} \right] \nabla (c-a) \Delta (c) \\ \times \Phi[c-a, c-b; c; xq^{a+b-c}] \Phi[c-a, c-b'; c; yq^{a+b'-c}] \\ = {}_4\Phi_3 \left[\begin{matrix} c-b-b', a, -\delta, -\delta'; \\ c-b, c-b', 1-\delta-\delta'+a-c, q \end{matrix} \right] \Phi^{(1)} [c-a; c-b, c-b'; c; xq^{a+b-c}, yq^{a+b'-c}]$$

by (2.9).

This on simplification gives the required result.

Proof of (6.2). In order to prove (6.2) we use an identity due to Jackson (*) (4; 35)

$$\Phi^{(3)} [a, a'; b, b'; c; x, y] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (a)_r (a')_r (b)_r (b')_r}{(1)_r (c)_{2r} (c+r-1)_r} q^{rc+3/2r(r-1)} x^r y^r \times \\ \Phi[a+r, b+r; c+2r; x] \Phi[a'+r, b'+r, c+2r; y].$$

Now, using (4.1) to transform the first ${}_2\Phi_1$ on the right we get

$$(6.11) \quad \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Phi^{(3)} [a, a'; b, b'; c; x, y] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (a)_r (a')_r (b)_r (b')_r}{(1)_r (c)_{2r} (c+r-1)_r} \times \\ q^{rc+3/2r(r-1)} x^r y^r \Phi[c-a+r, c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}] \\ \times \Phi[a'+r, b'+r; c+2r; y].$$

The right hand side of (6.11) can easily be shown to be equal to

$$(6.12) \quad \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c)_{2r} (a)_r (b)_r (-\delta)_r (-\delta')_r (-)^r}{(1)_r (c+r-1)_r (c-a)_r (c-b)_r (c+\delta)_r (c+\delta')_r} q^{r(\delta+\delta'+2c-a-b)+1/2r(r-1)} \\ \times \Phi[c-a, c-b; c; xq^{a+b-c}] \Phi[a', b'; c; y].$$

* There is a misprint in Jackson's result in the solitary quadratic factor $q^{1/2r(r-1)}$ on the right. This should be $q^{3/2r(r-1)}$.

Using a limiting case of a result due to Watson (Tract 8.5(2)) we can write (6.12) in the form

$$\begin{aligned} & {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} c-a-b, -\delta, -\delta' \\ c-a, c-b \end{matrix} ; q^{c+\delta+\delta'} \right] \Delta(c) \Phi[c-a, c-b; c; xq^{a+b-c}] \times \\ & \qquad \qquad \qquad \Phi[a', b'; c; y] \\ & = {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} c-a-b, -\delta, -\delta' \\ c-a, c-b \end{matrix} ; q^{c+\delta+\delta'} \right] \Phi^{(3)}[c-a, a'; c-b, b'; c; xq^{a+b-c}, y] \end{aligned}$$

on using the result of (2.9).

This on simplification gives the desired identity.

7. To deduce (6.3) we use a result due to Jackson (4; 39) on the right hand side of (6.1) to replace $\Phi^{(1)}$ by $\Phi^{(3)}$ and diagonal summation gives the required expansion. To obtain (6.4) we start with Jackson (4; 40) and replace the $\Phi^{(1)}$ on the right by (6.1). Then diagonal summation and simplification yields (6.4). To prove (6.5) we use (6.2) with $a' = c - a$ and replace the $\Phi^{(3)}$ on the right by a $\Phi^{(1)}$ using Jackson (4; 40). Consequent diagonal summation and an application of the basic analogue of Vandermonde's Theorem (Tract. 8.4(3)) gives the result.

Next, to deduce (6.6) we begin with Jackson (4; 39) and use (6.2) with $a' = a$ on the right hand side of above to replace its $\Phi^{(3)}$ by another $\Phi^{(3)}$. Summing diagonally and applying the basic analogue of Vandermonde's theorem we get the expansion. Finally, to deduce

$$(6.7) \text{ we use (6.2) and the similar result for } \Pi \frac{(1-yq^n)}{(1-yq^{a'+b'-c+n})} \Phi^{(3)}$$

to get a double series in $\Phi^{(3)}$. Simplification and summation as before gives the required identity.

8. In this section I shall state, without proof, some identities involving basic confluent hypergeometric functions. These identities are of special interest being closely connected with the basic Bessel, Laguerre, and Whittaker's functions discussed by Jackson. They can either be obtained directly from the identities of Jackson (5) or as limiting cases of the results already discussed in § 6-7, as has been indicated later in the section. The expansions are as follows (*).

* The notation for confluent functions is the same as given by Jackson (5).

$$(8.1) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n}) (1+yq^{a-c+n})} \Upsilon_1 \left[a; b; c; x, y; \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (c-a)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{r(a+b-c)+1/2r(r-1)} \times \\ & \quad \Upsilon_1 [c-a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, -yq^{a-c}], \end{aligned} \right.$$

$$(8.2) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Xi_1 [a, a'; b; c; x, y; \lambda] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)_r (a')_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{r(a+b)+(\lambda+1)r(r-1)} \times \\ & \quad \Xi_1 [c-a+r, a'+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{2\lambda r}; \lambda], \end{aligned} \right.$$

$$(8.3) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n}) (1+yq^{a-c+n})} \Upsilon_1 \left[a; b; c; x, y; \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (c-a)_r (c-b)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{r(a+b-c)+r(r-1)} \times \\ & \quad \times {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} a, -r; q \\ c-b \end{matrix} \right] \\ & \quad \times \Xi_1 [c-a+r, c-a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, -yq^{a-c}], \end{aligned} \right.$$

$$(8.4) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n}) (1+yq^{a-c+n})} \Xi_1 \left[a, a; b; c; x, y; \frac{1}{2} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(a)_r (c-a)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{r(a+b-c)+1/2r(r-1)} {}_2\Phi_1 \left[\begin{matrix} b, -r; q \\ c-a \end{matrix} \right] q^{r+c-b} \times \\ & \quad \Upsilon_1 [c-a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, -yq^{a-c}], \end{aligned} \right.$$

$$(8.5) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Xi_1 [a, c-a; b; c; x, y; \lambda] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (c-a)_r (a)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{rb+(\lambda+1/2)r(r-1)} \times \\ & \quad \Upsilon_1 [c-a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{2\lambda r}; \lambda], \end{aligned} \right.$$

$$(8.6) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Upsilon_1 [a; b; c; x, y; \lambda] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a)_r (a)_r}{(1)_r (c)_{2r}} q^{ra+(\lambda+1)r(r-1)} x^r y^r \times \\ & \quad \Xi_1 [c-a+r, a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{2\lambda r}; \lambda], \end{aligned} \right.$$

$$\begin{aligned}
 (8.7) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})(1+yq^{a'-c+n})} \Xi_1 \left[\begin{matrix} d, a'; b; c; x, y; \\ \frac{1}{2} \end{matrix} \right] \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-)^r (c-a)_r (c-b)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{r(a+a'+b-c)+r(r-1)} \times \\ & \quad {}_3\Phi_2 \left[\begin{matrix} c-a-b, a', -r; \\ c-a, c-b, \end{matrix} q^{r+c-a'} \right] \\ & \quad \times \Xi_1 [c-a+r, c-a'+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, -yq^{a'-c}], \end{aligned} \right. \\
 (8.8) \left\{ \begin{aligned} & \Pi \frac{(1-xq^n)}{(1-xq^{a+b-c+n})} \Xi_2 [a; b; c; x, y; \lambda] = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(c-a-b)_r}{(1)_r (c)_{2r}} x^r y^r q^{ra+rb+(\lambda+1)r(r-1)} \\ & \quad \times \Xi_2 [c-a+r; c-b+r; c+2r; xq^{a+b-c}, yq^{2\lambda r}; \lambda]. \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

The identities (8.1), (8.3), (8.4) and (8.7) are the limiting cases of (6.1), (6.3), (6.4) and (6.7) respectively. The identities (8.2), (8.5) and (8.6) are the limiting cases of (6.2), (6.5) and (6.6) respectively when $\lambda = \frac{1}{2}$. For other values of λ they can be directly derived from known formulae due to Jackson ⁽⁵⁾. The identity (8.8) is a limiting case of (8.2).

9. I conclude this paper by giving a formal expansion which gives the generating function for a sequence of basic polynomials, in particular, of a general polynomial of the basic hypergeometric type.

Let $\Phi(t)$ be an analytic function which does not vanish for $t = 0$ and let it be defined by an absolutely convergent series

$$\Phi(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n t^n}{(1)_n},$$

and let

$$f(xt) = {}_0\Phi_{\kappa} [-; \beta_1, \dots, \beta_{\kappa}; xtq^{\sigma}], \quad \sigma > 0.$$

Then it can easily be shown by simple rearrangement of the series that

$$(9.1) \quad \Phi(t) f(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) t^n,$$

where $y_n(x)$ is a polynomial of degree n given by

$$(9.2) \quad y_n(x) = \sum_{s=0}^n \frac{b_{n-s} x^s q^{\sigma s}}{(1)_s (1)_{n-s} (\beta_1)_s \dots (\beta_{\kappa})_s}.$$

Hence, (9.1) can be taken to be the generating function of the polynomials (9.2).

A particular case of interest to us is obtained when $\Phi(t)$ itself is a basic hypergeometric function with

$$b_n = \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(\epsilon_1)_n \dots (\epsilon_r)_n} q^{np}$$

We get from (9.2) that $y_n(x)$ is given by

$$y_n(x) = \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(1)_n (\epsilon_1)_n \dots (\epsilon_r)_n} q^{np} \sum_{s=0}^n (-1)^{s(r+p+1)} \frac{(-n)_s (1-n-\epsilon_1)_s \dots (1-n-\epsilon_r)_s q^{\frac{1}{2}(p-r-1)s(s+1)}}{(1)_s (\beta_1)_s \dots (\beta_k)_s (1-n-\alpha_1)_s \dots (1-n-\alpha_p)_s} \times \\ \times x^s q^{s(\Sigma \epsilon_r - \Sigma \alpha_p + \sigma - \rho + 1 - np + nr + n)}$$

where $\Sigma \epsilon_r = \epsilon_1 + \dots + \epsilon_r$ and $\Sigma \alpha_p = \alpha_1 + \dots + \alpha_p$.

In particular, if $r = p - 1$, we get the generating function for

$$y_n(x) = \frac{(\alpha_1)_n \dots (\alpha_p)_n}{(1)_n (\epsilon_1)_n \dots (\epsilon_{p-1})_n} q^{np} \times_p \Phi_{k+p} \left[\begin{matrix} -n, 1-\epsilon_1-n, \dots, 1-\epsilon_{p-1}-n; \\ \beta_1, \dots, \beta_k, 1-\alpha_1-n, \dots, 1-\alpha_p-n, \end{matrix} ; xq^{\Sigma \epsilon_{p-1} - \Sigma \alpha_p + \sigma - \rho + 1} \right].$$

10. Convergence Conditions : In order that the various rearrangements be justified in the formal proof of the foregoing expansions deduced in §§3-6, the conditions of absolute convergence of the expansions must be stated. We shall take all the parameters in the hypergeometric functions to be real and positive; the variables x and y should be replaced by their absolute values $|x|, |y|$, but, for simplicity, we shall for the moment regard x, y themselves as positive, replacing them by $|x|, |y|$ in the final statement of the convergence conditions, which involve x, y alone. The base q is also supposed to be real and positive such that $0 < q < 1$.

We need then to know simple bounds for the basic hypergeometric functions with positive variables when their positive parameters diverge to infinity in certain ways. We establish these bounds by proving the following simple lemmas.

Lemma 1.

- (i) $\Phi^{(1)}[a+1; b+1, b'; c+1; x, y] < A \Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y];$
- (ii) $\Phi^{(2)}[a+1; b+1, b'; c+1, c'; x, y] < A \Phi^{(2)}[a; b, b'; c, c'; x, y];$
- (iii) $\Phi^{(3)}[a+1, a'; b', b+1; c+1; x, y] < A \Phi^{(3)}[a, b; a', b'; c; x, y];$

$$(iv) \Phi^{(4)}[a+1, b+1; c+1, c'; x, y] < A \Phi^{(4)}[a, b; c, c'; x, y];$$

$$(v) \Phi[a+1, b+1; c+1; x] < A \Phi[a, b; c; x];$$

where $A = 1/(1-q^a)(1-q^b).$

Proof. (i) Let $R_{m,n}$ be the ratio of the coefficients of $x^m y^n$ on both sides, then

$$R_{m,n} = (1-q^c) \frac{(1-q^{a+m+n})(1-q^{b+m})}{(1-q^{c+m+n})} < 1,$$

since $\frac{1-q^c}{1-q^{c+m+n}} \leq 1$ for all m and n and $0 < q < 1$. Hence, the result follows.

The proofs of (ii), (iii), (iv) and (v) follow in exactly the same way.

Corollary to Lemma 1. Repeated application of the results of Lemma 1 give

$$(i) \Phi^{(1)}[a+r+s; b+r, b'+s; c+r+s; x, y] < \frac{1}{(a)_{r+s}(b)_r(b')_s} \Phi^{(1)},$$

$$(ii) \Phi^{(2)}[a+r+s; b+r, b'+s; c+r, c'+s; x, y] < \frac{1}{(a)_{r+s}(b)_r(b')_s} \Phi^{(2)},$$

$$(iii) \Phi^{(3)}[a+r, a'+s; b+r, b'+s; c+r+s; x, y] < \frac{1}{(a)_r(b)_r(a')_s(b')_s} \Phi^{(3)},$$

$$(iv) \Phi^{(4)}[a+r+s, b+r+s; c+r, c'+s; x, y] < \frac{1}{(a)_{r+s}(b)_{r+s}} \Phi^{(4)},$$

$$(v) \Phi[a+r, b+r; c+r; x] < \frac{1}{(a)_r(b)_r} \Phi,$$

where $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \Phi^{(3)}, \Phi^{(4)}$ and Φ means the same function as on the left without r and s .

Lemma 2

$$(i) \Phi[a+1, b; c+1; x] < \frac{(1-q^c)}{(1-q^a)} \Phi[a, b; c; x],$$

$$(ii) \Phi^{(1)}[a+1; b+1, b'+1; c+2; x, y] < \frac{(1-q^c)(1-q^{c+1})}{(1-q^a)(1-q^b)(1-q^{b'})(1-q^a)} \times$$

$$\Phi^{(1)}[a; b, b'; c; x, y].$$

where $c > a > A$.

Proof. (i) As before

$$R_m = \frac{(1-q^a)(1-q^{a+m})}{(1-q^a)(1-q^{c+m})} < 1 \text{ if } c > a > A \text{ and } 0 < q < 1.$$

Thus the lemma is proved,

$$(ii) R_{m,n} = \frac{(1-q^{a+m+n})(1-q^a)(1-q^{b+m})(1-q^{b'+m})}{(1-q^{c+m+n})(1-q^{c+m+n+1})}$$

< 1 , under the stated conditions. The inequality follows.

Corollary to Lemma 2. ()* We have

$$(i) \Phi[a+r, b+r; c+2r; x] < \frac{(c)_{2r}}{(A)_r(A')_r} \Phi[a, b; c; x],$$

where $c > a > A, c > b > A'$;

$$(ii) \Phi^{(1)}[a+r; b+r, b'+r; c+2r; x, y] < \frac{(c)_{2r}}{(A)_r(a)_r(b)_r(b')_r} \\ \times \Phi[a; b, b'; c; x, y],$$

where $c > a > A$.

Lemma 3. We have

$$(c)_{m+n} \geq (c)_m (c)_n \\ < (c)_m (c^*)_n,$$

where $(c^*)_n = (1+q^c) \dots (1+q^{c+n-1})$.

The proof is obvious.

Lemma 4. For $m \leq r$ (m, r positive integers),

$$|(-r)_m| < q^{-\frac{1}{2}r(r+1)}$$

Proof.

$$|(-r)_m| = |(1-q^{-r})(1-q^{-r+1}) \dots (1-q^{-r+m-1})| \\ = |q^{-mr+\frac{1}{2}m(m-1)} (-)^m (1-q^r)(1-q^{r-1}) \dots (1-q^{r-m+1})| \\ < q^{-mr+\frac{1}{2}m(m-1)} < q^{-\frac{1}{2}r(r+1)} \text{ for all } m \leq r, 0 < q < 1.$$

Corollaries to Lemma 4.

(i) For large positive values of r and s and $0 < q < 1$

$$\Phi \left[\begin{matrix} c : A, B, -r; A', B', -s; \\ C : a, b; a', b'; \end{matrix} \middle| q, q \right] < K q^{-\frac{1}{2}r(r+1)-\frac{1}{2}s(s+1)}$$

where K , is a constant independent of r and s .

* There is no loss of generality in taking $c > a$ or b . Since c diverges to infinity as $c + 2r$ and a and b only as $a + r, b + r$. Hence c can be easily supposed to be greater than a and b .

(ii) Under the same conditions as in (i)

$$\Phi \left[\begin{matrix} A, B : C, -r; C', -s; \\ a, b : c, c'; \end{matrix} \middle| q, q \right] < K q^{-\frac{1}{2}r(r+1) - \frac{1}{2}s(s+1)}$$

$$(iii) \quad \Phi \left[\begin{matrix} a, b, c, -r; \\ d, e, f, \end{matrix} \middle| q \right] < K q^{-\frac{1}{2}r(r+1)}, \text{ for } r \text{ large and } 0 < q < 1.$$

$$(iv) \quad \Phi \left[\begin{matrix} a, b, -r; \\ d, e, \end{matrix} \middle| q \right] < K q^{-\frac{1}{2}r(r+1)}, \text{ for } r \text{ large and } 0 < q < 1.$$

$$(v) \quad \Phi \left[\begin{matrix} a, b, c+r, -r; \\ d, e, f, \end{matrix} \middle| q \right] < \frac{K}{(c)_r} q^{-\frac{1}{2}r(r+1)}, \text{ for } r \text{ large and } 0 < q < 1.$$

$$(vi) \quad \Phi \left[\begin{matrix} a, b, c, -r; \\ d, e, f - r, \end{matrix} \middle| q \right] < K, \text{ for } r \text{ large and } 0 < q < 1.$$

$$(vii) \quad \Phi \left[\begin{matrix} a, b, -r; \\ d, e - r, \end{matrix} \middle| q \right] < K, \text{ for } r \text{ large and } 0 < q < 1.$$

Proof of (i). The series on the left of (i) is less than

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s \frac{(c)_{m+n} (A)_m (B)_m (-r)_m (A')_n (B')_n (-s)_n}{(1)_m (1)_n (a)_m (b)_m (a')_n (b')_n (C)_{m+n}} q^m q^n \right| \\ & < \sum_{m=0}^r \sum_{n=0}^s \frac{(c)_{m+n} (A)_m (B)_m (A')_n (B')_n |(-r)_m| |(-s)_n|}{(1)_m (1)_n (a)_m (b)_m (a')_n (b')_n (C)_{m+n}} q^m q^n \\ & < \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(c)_{m+n} (A)_m (B)_m (A')_n (B')_n}{(1)_m (1)_n (a)_m (b)_m (a')_n (b')_n (C)_{m+n}} q^{-\frac{1}{2}r(r+1) - \frac{1}{2}s(s+1) + m + n} \end{aligned}$$

by Lemma 4.

Using Lemma 3, we now get

$$< K q^{-\frac{1}{2}r(r+1) - \frac{1}{2}s(s+1)}, \quad \text{Since } 0 < q < 1.$$

The proof of (ii), (iii), (iv) and (v) follows similarly. In proving (v) we have only to note that

$$(c)_r (c+r)_m = (c)_{r+m} < (c)_m.$$

(vi) To prove (vi) we note that for $m \leq r$

$$\begin{aligned} \frac{(-r)_m}{(f-r)_m} &= \frac{1}{q^{mf}} \frac{(1 - q^{r-m+1}) \dots (1 - q^{r-1}) (1 - q^r)}{(1 - q^{r-f-m+1}) \dots (1 - q^{r-f-1}) (1 - q^{r-f})} \\ &< C, \text{ for large } r \text{ and } 0 < f < 1. \end{aligned}$$

Hence the required result.

The proof of (vii) follows similarly.

Now, using the results of the lemmas and their corollaries we can state the following intervals of convergence for our expansions.

$$|x| < q \text{ in (3.1); } |x| < q \text{ in (3.2);}$$

$$|x| < q, |y| < q \text{ in (5.1), (5.2), (5.3), (5.4);}$$

$$|x| < \min(1, q^{c-a-b}), |y| < \min(1, q^{c-a-b'}) \text{ in (6.1), (6.3), (6.4);}$$

$$|x| < \min(1, q^{c-a-b}), |y| < 1 \text{ in (6.2), (6.5) and (6.6);}$$

$$|x| < \min(1, q^{c-a-b}), |y| < \min(1, q^{c-a'-b'}) \text{ in (6.7).}$$

The conditions of convergence for the expansions (5.1) — (5.4) have been stated for the case $\lambda = 0$. For other values of λ , the convergence is even sharper under the same conditions due to the presence of the quadratic factors of the type $q^{\lambda n(n-1)}$. It may also be remarked that these conditions are quite stringent and be relaxed by proving finer inequalities, but this would require much more detailed and complicated analysis than the importance of the expansions seems to justify. For similar reasons the results have not been extended to general values of q , and only the most interesting region $0 < q < 1$ has been considered. The expansions can, however, be shown true for complex q as well.

I am thankful to Professor Bailey for his kind help and suggestions during the preparation of this paper.

Mathematics Department,
Bedford College
London N. W. 1

REFERENCES

1. J. L. BURCHNALL and T. W. CHAUNDY, *Quart. Jour. of Math. (Oxford)*, 11 (1940), 249-70.
2. J. L. BURCHNALL and T. W. CHAUNDY, *Quart. Jour. of Math. (Oxford)*, 12 (1941), 112-28.
3. T. W. CHAUNDY, *ibid*, 13 (1942), 159-171.
4. F. H. JACKSON, *ibid*, 13 (1942), 69-82.
5. F. H. JACKSON, *ibid*, 15 (1944), 49-61.

Operational Calculus with two variables

BY

N. K. CHAKRABARTY

Krishnagar College, Krishnagar, Nadia, West Bengal

§ 1. — The present paper is a continuation of a series of three other papers, now in the press, by the author. In his last paper, the author obtained some operational representations

$$\Phi(p, q) \doteq \Psi(x, y) \quad \dots (1.1)$$

by combination of two operational representations of the types

$$f(p, q) \doteq h(x, y) \quad \dots (1.2)$$

$$\text{and} \quad \lambda(p, q) \doteq g(x, y) \quad \dots (1.3)$$

as applications of general theorems proved there.

In the present paper, the author has deduced some more theorems and has studied their consequences. One of these, it is important to note, is that it is possible to obtain operational representations of the type (1.2) when (1.1) and (1.3) are given.

As before, the notation

$$f(p, q) \doteq h(x, y)$$

will be used to represent the double integral

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} h(x, y) dx dy, \quad R(p) > 0, \quad R(q) > 0.$$

The changes in the orders of double integrations, necessary in the demonstrations of the theorems will be justified by taking note of the fact that,

$$\text{if } \Phi(u, v, x, y) = \Phi_1(u, v, x, y) \Psi_1(x, y) = \Phi_2(u, v, x, y) \Psi_2(x, y) \dots (A)$$

where

$$(a) \quad \Phi_1(u, v, x, y) \text{ is bounded for } x \geq 0, y \geq 0, 0 \leq u \leq b_1, \\ 0 \leq v \leq b_2 \quad \dots (B)$$

$$(b) \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_1(x, y) dx dy \text{ is absolutely convergent} \quad \dots (C)$$

$$(c) \Phi_2(u, v, x, y) \text{ is bounded for } u \geq 0, v \geq 0, 0 \leq x \leq a_1, \\ 0 \leq y \leq a_2 \quad \dots (D)$$

$$(d) \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi_2(x, y) dx dy \text{ is absolutely convergent} \quad \dots (E)$$

then

$$\int_0^\infty \int_0^\infty dudv \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(u, v, x, y) dx dy = \int_0^\infty \int_0^\infty dx dy \int_0^\infty \int_0^\infty \Phi(u, v, x, y) dudv \dots (F)$$

In the theorems we shall only mention the conditions under which (B) — (E) are valid and the various steps in the theorems will be taken to be justified.

§ 2. — Theorem I

Let $f(p, q) \doteq h(x, y)$

and $\Phi(p, q) h(p^m, q^n) \doteq \Psi(x, y)$,

then

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x, y) dx dy \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{n}}}{\Phi(s^m, t^n)} e^{-ps - xs^{\frac{1}{m}}} \cdot e^{-qt - yt^{\frac{1}{n}}} ds dt$$

under suitable conditions satisfied by h , Φ , Ψ . We here assume that the double integral exists.

From the given operational representations

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} h(x, y) dx dy \quad \dots (2.1)$$

and

$$\frac{\Phi\left(x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{n}}\right) h(x, y)}{x^{\frac{1}{m}} y^{\frac{1}{n}}} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx^{\frac{1}{m}} - ty^{\frac{1}{n}}} \Psi(s, t) ds dt. \quad \dots (2.2)$$

We obtain

$$\frac{(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} \frac{x^{\frac{1}{m}} y^{\frac{1}{n}}}{\Phi\left(x^{\frac{1}{m}}, y^{\frac{1}{n}}\right)} dx dy \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-sx^{\frac{1}{m}} - ty^{\frac{1}{n}}} \Psi(s, t) ds dt \dots (2,3)$$

$$= \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x, y) dx dy \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{s^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{n}}}{\Phi\left(s^{\frac{1}{m}}, t^{\frac{1}{n}}\right)} \cdot e^{-ps - xs^{\frac{1}{m}}} \cdot e^{-qt - yt^{\frac{1}{n}}} ds dt \dots (2,4)$$

on changing the order of integrations.

To justify the validity of the changes in the orders of integrations, it will be enough if we ensure the absolute convergence of the two integrals

$$(1) \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x, y) dx dy \text{ and } (2) \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-qt} \frac{s^{\frac{1}{m}} t^{\frac{1}{n}}}{\Phi\left(s^{\frac{1}{m}}, t^{\frac{1}{n}}\right)} ds dt.$$

For this we may assume

$$\Psi(x, y) = O(x^{\mu_1}), \text{ for small } x, R(\mu_1) > 0$$

$$= O(y^{\mu_2}), \text{ for small } y, R(\mu_2) > 0.$$

$$\Psi(x, y) = O\{\exp(-x^{\lambda_1})\} \text{ for large } x, R(\lambda_1) > 0.$$

$$= O\{\exp(-y^{\lambda_2})\} \text{ for large } y, R(\lambda_2) > 0.$$

and

$$\Phi(s, t) = O(s^{\omega f - m\alpha}) \text{ for small } s, R(\alpha) > 0$$

$$= O(t^{1-n\beta}) \text{ for small } t, R(\beta) > 0$$

and (if necessary)

$$\Phi(s, t) = O\{\exp(s^{m\lambda})\}, \text{ for large } s, R(\lambda) > 0$$

$$= O\{\exp(t^{n\mu})\}, \text{ for large } t, R(\mu) > 0$$

The following are the special cases of the general theorem proved above :

Let $m = n = -1$, and $\Phi(p, q) = (pq)^{-\frac{1}{2}}$. Then since

$$\int_0^\infty e^{-p/u-ux} \frac{du}{u\sqrt{u}} = \left(\frac{\pi}{p}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-2\sqrt{px}},$$

we obtain

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \pi \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-2\sqrt{px} - 2\sqrt{qy}} \Psi(x, y) \frac{dx dy}{\sqrt{xy}} \dots\dots (2.5)$$

which can be written as

$$\frac{1}{p^2 q^2} f\left(\frac{1}{4} p^2, \frac{1}{4} q^2\right) = \frac{1}{4} \pi \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px - qy} \Psi(x^2, y^2) dx dy \dots\dots (2.6)$$

We thus obtain the theorem

Theorem 1A

If $f(p, q) \doteq h(x, y)$, $\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y)$, then

$$\frac{1}{pq} f\left(\frac{1}{4} p^2, \frac{1}{4} q^2\right) \doteq \frac{1}{4} \pi \Psi(x^2, y^2).$$

As regards the validity of the theorem, we may assume

$$h(x, y) = O(x^{\alpha_1}), \text{ for small } x, R(\alpha_1) > 0$$

$$= O(y^{\alpha_2}), \text{ for small } y, R(\alpha_2) > 0$$

$$h(x, y) = O\{\exp(-x^{\beta_1})\}, \text{ for large } x, R(\beta_1) > 0$$

$$= O\{\exp(-y^{\beta_2})\}, \text{ for large } y, R(\beta_2) > 0.$$

$$\Psi(x, y) = O(x^{\alpha_3}), \text{ for small } x, R(\alpha_3) > 0$$

$$= O(y^{\alpha_4}), \text{ for small } y, R(\alpha_4) > 0.$$

$$\Psi(x, y) = O\{\exp(-x^{\beta_3})\}, \text{ for large } x, R(\beta_3) > 0$$

$$= O\{\exp(-y^{\beta_4})\}, \text{ for large } y, R(\beta_4) > 0.$$

Cor. I. — Goldsteins' theorem as obtained by Bose [4] states that,

« If $\Phi_1(p, q) \doteq h_1(x, y)$, $\Phi_2(p, q) \doteq h_2(x, y)$, then

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \Phi_1(u, v) h_2(u, v) \frac{du dv}{uv} = \int_0^\infty \int_0^\infty h_1(s, t) \Phi_2(s, t) \frac{ds dt}{st} ».$$

Taking

$$\Phi_1(p, q) = \frac{1}{pq} f\left(\frac{1}{4} p^2, \frac{1}{4} q^2\right), \text{ so that}$$

$h_1(x, y) = \frac{1}{4} \pi \psi(x^2, y^2)$, and assuming further that

$\Phi(p, q) \doteq \lambda(x, y)$, we obtain from theorem 1A, the theorem
Theorem 1B.

If $f(p, q) \doteq h(x, y); \frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y)$,

and $\Phi(p, q) \doteq \lambda(x, y)$,
then

$$\begin{aligned} & \pi \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi\left(\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{4}y^2\right) \Phi(x, y) \frac{dx dy}{xy} \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2, y^2) \lambda(x, y) \frac{dx dy}{x^2 y^2}; \end{aligned}$$

which is valid if

$\lambda(x, y) = O(x^\alpha)$, for small x , $R(\alpha) > 0$

$= O(y^\beta)$, for small y , $R(\beta) > 0$

$\lambda(x, y) = O\{\exp(-x^{\alpha_1})\}$, for large x , $R(\alpha_1) > 0$

$= O\{\exp(-y^{\beta_1})\}$, for large y , $R(\beta_1) > 0$.

$h(x, y)$ and $\Psi(x, y)$ satisfying the conditions laid down in theorem 1A.

Putting $\Phi(p, q) = 1$, so that $\lambda(x, y) = 1$, we obtain from the above

$$\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi\left(\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{4}y^2\right) \frac{dx dy}{xy} = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x^2, y^2) \frac{dx dy}{x^2 y^2} \dots (2.7)$$

provided the integrals involved are convergent,

whenever $f(p, q) \doteq h(x, y)$ and $\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y)$.

Again, taking

$$\lambda(x, y) = e^{-ax-by} \doteq \frac{p}{p+a} \cdot \frac{q}{q+b} \equiv \Phi(p, q), \quad a > 0, \quad b > 0$$

in theorem 1B, we obtain

$$\pi \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi\left(\frac{1}{4}x^2, \frac{1}{4}y^2\right) \frac{dx dy}{(x+a)(y+b)} = \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ax-by} f(x^2, y^2) \frac{dx dy}{x^2 y^2}$$

We then deduce the following theorem

Theorem 1C.

If $f(p, q) \doteq h(x, y)$, $\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y)$;

then

$$\frac{f(x^2, y^2)}{x^2 y^2} \doteq \pi pq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Psi\left(\frac{1}{4} s^2, \frac{1}{4} t^2\right)}{(s+p)(t+q)} ds dt,$$

provided that $h(x, y)$ and $\Psi(x, y)$ satisfy the conditions of theorem 1A and the double integral is convergent.

We know that, if $f(p, q) \doteq h(x, y)$,
then

$$\frac{f(x, y)}{xy} \doteq pq \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h(s, t)}{(s+p)(t+q)} ds dt \quad \dots\dots (2.8)$$

Further,

if $f(p, q) \doteq h(x, y)$,

then [2]

$$h(x^2, y^2) \doteq \frac{pq}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4} p^2 s^2 - \frac{1}{4} q^2 t^2} f\left(\frac{1}{s^2}, \frac{1}{t^2}\right) ds dt \quad \dots\dots (2.9)$$

Thus from (2.8) and (2.9), we have

$$\begin{aligned} \frac{f(x^2, y^2)}{x^2 y^2} &\doteq \frac{pq}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{1}{4} p^2 u^2 - \frac{1}{4} q^2 v^2} \frac{du dv}{u^2 v^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{h(s, t)}{\left(s + \frac{1}{u^2}\right)\left(t + \frac{1}{v^2}\right)} ds dt \\ &= \frac{pq}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty h(s, t) ds dt \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4} p^2 u^2}}{1 + su^2} du \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{4} q^2 v^2}}{1 + tv^2} dv; \end{aligned}$$

on changing the order of integration;

$$= pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{1}{4} \frac{p^2}{s} + \frac{1}{4} \frac{q^2}{t}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{p}{2\sqrt{s}}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{q}{2\sqrt{t}}\right) h(s, t) \frac{ds dt}{\sqrt{st}} \dots (2.10)$$

$$\begin{aligned} \text{where } \operatorname{Erfc}(x) &= \int_x^\infty e^{-t^2} dt \\ &= \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2} x^2} W_{-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}}(x^2). \end{aligned}$$

Taking (2.10) with the theorem I(C), we obtain the theorem given below

Theorem I D.

$$\begin{aligned} \text{If} \quad & \frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y), \\ \text{then} \quad & \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{1}{4} \frac{p^2}{s} + \frac{1}{4} \frac{q^2}{t}} \operatorname{Erfc}\left(\frac{p}{2\sqrt{s}}\right) \operatorname{Erfc}\left(\frac{q}{2\sqrt{t}}\right) \frac{h(s, t)}{\sqrt{st}} ds dt \\ &= \pi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Psi\left(\frac{1}{4} s^2, \frac{1}{4} t^2\right)}{(s+p)(t+q)} ds dt, \end{aligned}$$

$h(x, y)$ and $\Psi(x, y)$ satisfying the conditions laid down in theorem IA.

Cor II. In the hypothesis of theorem IA, let us impose the additional condition $\Phi(p) \doteq g(x)$. We have proved before [2] the theorem:

$$\begin{aligned} \text{If} \quad & \Phi(u, v) \doteq f(x, y) \text{ and } \Psi(u) \doteq g(x), \\ & \int_0^\infty \frac{\Phi(u, v) g(u) du}{uv} = \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f(x, y) \Psi(x)}{x} e^{-vy} dx dy. \end{aligned}$$

We thus obtain

Theorem IE.

$$\begin{aligned} \text{If} \quad & f(p, q) \doteq h(x, y), \quad \frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y) \text{ and } \Phi(p) \doteq g(x), \\ \text{then} \quad & \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \frac{f\left(\frac{1}{4} u^2, \frac{1}{4} v^2\right) g(u) du}{u^2 v^2} = \frac{1}{4} \pi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Psi(x^2, y^2) \Phi(x) e^{-vy}}{x} dx dy.$$

For the validity of the theorem h and Ψ must satisfy the conditions of Theorem IA and $g(x)$ satisfies the relation

$$\begin{aligned} g(x) &= 0 \quad (x^\mu) \text{ for small } x, \quad R(\mu) > 0, \\ &= 0 \{ \exp(-x^\nu) \}, \text{ for large } x, \quad R(\nu) > 0, \end{aligned}$$

and that the integrals involved are convergent.

In particular,

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f\left(\frac{1}{4}u^2, \frac{1}{4}v^2\right) \frac{1}{u^2v^2} du dv = \frac{1}{4} \pi \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\Psi(x^2, y^2)}{x} e^{-vy} dx dy \dots (2.11)$$

$$\text{when } f(p, q) \doteq h(x, y) \text{ and } \frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y).$$

We now illustrate the above theorems by taking known operational representations involving special functions.

(1) McLachlan and Humbert [5] has proved that

$$\frac{pq}{1 + pq} \doteq J_0(2\sqrt{xy})$$

and Chakrabarty has shown that [3]

$$\sqrt{pq} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{pq}}\right) \doteq \frac{1}{\pi\sqrt{xy}} \text{ber}(4\sqrt{xy}).$$

Consequently

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{pq}} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{pq}}\right) &= \frac{1}{pq} \sqrt{pq} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{pq}}\right) \\ &\doteq \frac{1}{\pi} \int_0^x \int_0^y \frac{\text{ber}(4\sqrt{xy})}{\sqrt{xy}} dx dy, \text{ by the Product Theorem.} \end{aligned}$$

Hence by Theorem IA, we obtain, on simplification,

$$\frac{pq}{1 + p^2q^2} \doteq \int_0^x \int_0^y \text{ber}(2\sqrt{xy}) dx dy \dots (2.12)$$

From (2.12), we deduce, on applying the results of McLachlan and Humbert [5], Viz

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) \doteq p \Phi(p, q), \text{ if } f(0, y) = 0$$

and

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) \doteq q \Phi(p, q), \text{ if } f(x, 0) = 0,$$

the well-known operational representation [5]

$$\text{ber } (2 \sqrt{xy}) \doteq \frac{p^2 q^2}{1 + p^2 q^2}.$$

(2) We have the operational representations

$$\text{H}_o(2 \sqrt{xy}) \doteq \frac{\sqrt{pq}}{1 + pq}.$$

and [3]

$$\frac{1}{\pi \sqrt{xy}} \text{bei } (4 \sqrt{xy}) \doteq \sqrt{pq} \text{H}_o\left(\frac{2}{\sqrt{pq}}\right).$$

Hence proceeding exactly as above, we obtain by Theorem IA,

$$\frac{1}{1 + p^2 q^2} \doteq \int_0^x \int_0^y \text{bei } (2 \sqrt{xy}) dx dy.$$

This gives the well known [5] operational representation

$$\text{bei } (2 \sqrt{xy}) \doteq \frac{pq}{1 + p^2 q^2}.$$

(3) From the operational representations [3]

$$\{J_o(\sqrt{xy})\}^2 \doteq \frac{\sqrt{pq}}{(1 + pq)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\text{and } \frac{1}{\sqrt{xy}} I_o(\sqrt{xy}) J_o(\sqrt{xy}) \doteq \pi \sqrt{pq} \left\{ J_o\left(\frac{1}{\sqrt{pq}}\right) \right\}^2,$$

we obtain, by Theorem IA, and proceeding exactly as in the preceding examples, the relation

$$\frac{1}{(1 + p^2 q^2)^{\frac{1}{2}}} \doteq \int_0^x \int_0^y I_o(\sqrt{2xy}) J_o(\sqrt{2xy}) dx dy.$$

This leads to the operational representation [2]

$$\frac{pq}{(1 + p^2 q^2)^{\frac{1}{2}}} \doteq I_o(\sqrt{2xy}) J_o(\sqrt{2xy}).$$

(4) In the theorem 1A, let $h(x, y) = x^{m-\frac{1}{2}} y^{n-\frac{1}{2}} e^{-xy}$, so that [3]

$$j(p, q) = \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{p^{\frac{1}{2}(m-n-1)} q^{\frac{1}{2}(n-m-1)}} e^{\frac{1}{2}pq} W_{-\frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m-n)}(pq)$$

Thus

$$\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{p^m q^n} e^{-\frac{1}{pq}} \\ \therefore x^{\frac{2m-n}{3}} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \equiv \Psi^*(x, y).$$

Thus by Theorem 1A, we obtain, on simplification,

$$x^{\frac{4m-2n}{3}} y^{\frac{4n-2m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{x^2 y^2}) \\ \therefore \frac{\Gamma\left(m + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)}{\pi p^{m-n} q^{n-m}} e^{\frac{1}{32} p^2 q^2} W_{-\frac{1}{2}(m+n), \frac{1}{2}(m-n)}\left(\frac{1}{16} p^2 q^2\right).$$

a result already obtained by the author.

(5) Let $h(x, y) \equiv r F_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s \end{matrix} ; -xy \right)$,

so that [5]

$$j(p, q) \equiv {}_{r+2}F_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r, 1, 1 \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s \end{matrix} ; -\frac{1}{pq} \right).$$

Also [2,3]

$$\frac{1}{\sqrt{pq}} r F_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s \end{matrix} ; -\frac{1}{pq} \right) \\ \therefore \frac{\sqrt{xy}}{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)} {}_{r+2}F_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -xy \right).$$

Hence by Theorem 1A, we obtain, on reduction, the operational representation

$$\frac{1}{pq} {}_{r+2}F_s \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r, 1, 1 \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s \end{matrix} ; -\frac{1}{p^2 q^2} \right)$$

$$\frac{1}{pq} xy {}_rF_{s+2} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \dots, \alpha_r \\ \gamma_1, \dots, \gamma_s, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right) \dots\dots (2.13)$$

In particular

$$\frac{1}{pq} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, 1 \\ \gamma \end{matrix} ; -\frac{1}{p^2 q^2} \right) \frac{1}{pq} xy {}_0F_3 \left(\begin{matrix} \\ \gamma, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right) \dots\dots (2.14)$$

Since

$$\text{bei} (2\sqrt{xy}) = xy {}_0F_3 \left(1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right),$$

we obtain from (2.14), the operational representation

$$\frac{pq}{1 + p^2 q^2} \frac{1}{pq} \text{bei} (2\sqrt{xy})$$

by McLachlan and Humbert [5].

Again from (2.13), we have, on putting $r = 2, s = 3$,

$$\frac{1}{pq} {}_4F_3 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, 1, 1 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \end{matrix} ; -\frac{1}{p^2 q^2} \right) \frac{1}{pq} xy {}_2F_5 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right)$$

from which we deduce

$$\frac{1}{pq} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ \gamma \end{matrix} ; -\frac{1}{p^2 q^2} \right) \frac{1}{pq} xy {}_2F_5 \left(\begin{matrix} \alpha, \beta \\ 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \gamma \end{matrix} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right) \dots\dots (2.15)$$

which is a slight generalisation of (2.14).

Putting $r = 2, s = 4$, we have from (2.13),

$$\frac{1}{pq} {}_4F_4 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, 1, 1 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4 \end{matrix} ; -\frac{1}{p^2 q^2} \right) \frac{1}{pq} xy {}_2F_6 \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2 \\ \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4, \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \end{matrix} ; -\frac{x^2 y^2}{16} \right),$$

from which we find that

$$\frac{1}{pq} {}_1F_1\left(\alpha; \gamma; -\frac{1}{p^2q^2}\right) \doteq xy {}_1F_5\left(\begin{matrix} \alpha \\ 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, \gamma \end{matrix}; -\frac{x^2y^2}{16}\right) \dots\dots (2.16)$$

Since

$$M_{k,m}(x) = x^{m+\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}x} {}_1F_1\left(\frac{1}{2} + m + k; 2m + 1; -x\right),$$

we have from (2.16),

$$\begin{aligned} (pq)^{2m} e^{-\frac{1}{2p^2q^2}} M_{k,m}\left(\frac{1}{p^2q^2}\right) \\ \doteq xy {}_1F_5\left(\begin{matrix} \frac{1}{2} + m + k \\ 1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 2m + 1 \end{matrix}; -\frac{x^2y^2}{16}\right) \dots\dots (2.17) \end{aligned}$$

In particular

$$\frac{1}{pq} e^{-\frac{1}{p^2q^2}} \doteq xy {}_0F_4\left(1, 1, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{x^2y^2}{16}\right) \dots\dots (2.18)$$

$$(6) \text{ Let } f(p, q) \equiv \frac{m!}{(pq)^m} \cdot \frac{q^{m+1} - p^{m+1}}{q - p},$$

So that [5]

$$h(x, y) \equiv (x + y)^m.$$

Then

$$\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) = \frac{1}{\sqrt{pq}} \left(\frac{1}{p} + \frac{1}{q}\right)^m$$

$$\doteq x^{m+\frac{1}{2}} y^{\frac{1}{2}} \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^r}{\Gamma\left(m-r+\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)}.$$

$$\equiv \Psi(x, y).$$

Hence by theorem IA,

$$\frac{m!}{(pq)^{2m+1}} \frac{q^{2m+2} - p^{2m+2}}{q^2 - p^2} \\ \doteq \frac{\pi}{4^{m+1}} x^{2m+1} y \sum_{r=0}^m \binom{m}{r} \frac{\left(\frac{y}{x}\right)^{2r}}{\Gamma\left(m-r+\frac{3}{2}\right) \Gamma\left(r+\frac{3}{2}\right)} \dots \quad (2.19)$$

To illustrate Theorem IB, we take

$$(1) \quad \Phi(p, q) = p^\mu q^\nu e^{-a\sqrt{p} - b\sqrt{q}},$$

where [6]

$$p^\mu e^{-a\sqrt{p}} \doteq \sqrt{\frac{2}{\pi}} (2x)^{-\mu} e^{-\frac{a^2}{8x}} D_{2\mu-1} \left(\frac{a}{\sqrt{2x}} \right)$$

From theorem IB, we get on simplification, the operational representation

$$\Psi \left(\frac{1}{4} x^4, \frac{1}{4} y^4 \right) x^{2\mu-1} y^{2\nu-1} \\ \doteq \frac{pq}{\pi^2 \cdot 2^{\mu+\nu+1}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{p^2}{8s} - \frac{q^2}{8t}} D_{2\mu-1} \left(\frac{p}{\sqrt{2s}} \right) D_{2\nu-1} \left(\frac{q}{\sqrt{2t}} \right) f(s^2, t^2) \\ \frac{ds dt}{s^{\mu+2} t^{\nu+2}} \dots \quad (2.20)$$

where $f(p, q) \doteq h(x, y)$ and $\frac{1}{\sqrt{pq}} h \left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q} \right) \doteq \Psi(x, y)$, and the integrals

are supposed to be convergent.

(2) Again let us put

$$\lambda(x, y) = x^{-\mu} y^{-\nu} e^{-\frac{a}{x} - \frac{b}{y}},$$

where [6]

$$x^{-\mu} e^{-\frac{a}{x}} \doteq 2a^{\frac{1-\mu}{2}} p^{\frac{1+\mu}{2}} K_{\mu-1}^* (2\sqrt{ap}), \quad \text{Re}(p) > 0.$$

We then obtain from theorem IB, after simplification the operational representation

* K_μ is the modified Bessel function of the second kind [7].

$$x^\mu y^\nu f\left(\frac{1}{x^2}, \frac{1}{y^2}\right) \\ \doteq 4\pi p^{\frac{3-\mu}{2}} q^{\frac{3-\nu}{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\frac{1}{2}(\mu-1)} t^{\frac{1}{2}(\nu-1)} K_{\mu-1}(2\sqrt{ps}) K_{\nu-1}(2\sqrt{qt}) \\ \Psi\left(\frac{1}{4}s^2, \frac{1}{4}t^2\right) ds dt \dots \dots (2.21)$$

when $f(p, q) \doteq h(x, y)$ and $\frac{1}{\sqrt{pq}} h\left(\frac{1}{p}, \frac{1}{q}\right) \doteq \Psi(x, y)$, provided that the integral on the right hand side of (2.21) exists.

§ 3. In theorem I of § 2, let us put $m = n = \frac{1}{2}$ and

$$\Phi(s, t) = s^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\alpha} t^{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}\beta}, \quad R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0.$$

Then

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \int_0^\infty \int_0^\infty \Psi(x, y) dx dy \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-ps-xs^2} s^{\alpha-1} e^{-qt-yt^2} t^{\beta-1} ds dt \\ = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{p^2}{8x} + \frac{q^2}{8y}} D_{-\alpha}\left(\frac{p}{\sqrt{2x}}\right) D_{-\beta}\left(\frac{q}{\sqrt{2y}}\right) \Psi(x, y) \frac{dx dy}{x^{\frac{1}{2}\alpha} y^{\frac{1}{2}\beta}};$$

on simplification and making use of the well-known integral

$$D_{-n}(x) = \frac{e^{-\frac{1}{4}x^2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty e^{-tx - \frac{1}{2}t^2} t^{n-1} dt, \quad R(n) > 0.$$

We thus obtain the following Theorem

Theorem II

If $f(p, q) \doteq h(x, y)$,

and $\frac{1}{p^{\frac{1}{2}(\alpha-3)} q^{\frac{1}{2}(\beta-3)}} h(\sqrt{p}, \sqrt{q}) \doteq \Psi(x, y)$,

then with suitable conditions satisfied by h and Ψ , we get

$$\frac{f(p, q)}{pq} = \frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{2^{\frac{1}{2}(\alpha+\beta)}} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{p^2}{8x} + \frac{q^2}{8y}} D_{-\alpha}\left(\frac{p}{\sqrt{2x}}\right) D_{-\beta}\left(\frac{q}{\sqrt{2y}}\right) \Psi(x, y) \times \frac{dx dy}{x^{\frac{1}{2}\alpha} y^{\frac{1}{2}\beta}};$$

$R(\alpha) > 0, R(\beta) > 0$.

For the validity of the theorem, we may assume

$$\Psi(x, y) = 0(x^{\alpha_1}), \text{ for small } x, R(\alpha_1) > 0$$

$$= 0(y^{\alpha_2}), \text{ for small } y, R(\alpha_2) > 0$$

$$\Psi(x, y) = 0\{\exp(-x^{\beta_1})\}, \text{ for large } x, R(\beta_1) > 0$$

$$= 0\{\exp(-y^{\beta_2})\}, \text{ for large } y, R(\beta_2) > 0.$$

As an application of the theorem, let us put

$$h(x, y) = \frac{\sqrt{xy}}{x + y},$$

$$\text{so that [5],} \quad f(p, q) = \frac{1}{2} \pi \frac{\sqrt{pq}}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2},$$

Let us take $\alpha = \beta = \frac{5}{2}$, we obtain [5]

$$\frac{1}{p^{\frac{1}{2}(x-3)} q^{\frac{1}{2}(\beta-3)}} \cdot h(\sqrt{p}, \sqrt{q}) = \frac{\sqrt{pq}}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x+y}} \equiv \Psi(x, y).$$

The theorem then gives

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\frac{p^2}{8x} + \frac{q^2}{8y}} D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{p}{\sqrt{2x}}\right) D_{-\frac{5}{2}}\left(\frac{q}{\sqrt{2y}}\right) \frac{dx dy}{x^{5/4} y^{5/4} (x+y)^{\frac{1}{2}}} \\ = \frac{32\sqrt{2\pi}}{9\sqrt{pq}(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \dots\dots (3.1) \end{aligned}$$

The author is grateful to Dr S. C. Mitra of the Lucknow University for his keen interest and helpful criticisms during the preparation of the paper.

REFERENCES

1. CHAKRABARTY N. K. — *Operational Calculus with two variables* (Ganita, 4 (1) 1953.)
2. CHAKRABARTY N. K. — *Operational Calculus with two variables*. (In the press).
3. CHAKRABARTY N. K. — *Operational Calculus with two variables*. (In the press).
4. BOSE S. K. — *Bull. Cal. Math. Soc.* (1949) 4 (41) 173.
5. McLACHLAN, N.W. and HUMBERT P. — *Memorial des Sciences Math.* (1941).
6. McLACHLAN, N.W. and HUMBERT P. — *Ibid.* 52, 16.
7. WATSON, G. N. — *Treatise on Bessel Functions* (1948).

On Some Sequences of Laplace Transforms

BY

H. M. SRIVASTAVA

Lucknow University, India

We know that if

$$\Phi(p) = p \int_0^{\infty} e^{-px} f(x) dx$$

then $\Phi(p)$ is known as the image and $f(x)$ the original and we write symbolically $\Phi(p) \subset f(x)$. The idea has been generalised to n variables by P. Delerue, so that if

$$\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) = p_1 p_2 \dots p_n \int_0^{\infty} \dots \int_0^{\infty} e^{-\sum_{i=1}^n p_i x_i} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1, \dots, dx_n$$

then $\Phi(p_1, p_2, \dots, p_n) \subset f(x_1, x_2, \dots, x_n)$. In his thesis, P. Delerue gives several interesting rules on sequences of such transforms and has used them to obtain images in n variables. The object of this paper is to obtain some generalisations of Delerue's rules and to give some rules analogous to his.

1. We shall first prove the following rule :

(A) If $F(x) \supset h(p)$ and $g(x) \supset p^{-m} F(p)$, ($m \geq 0$ and integral)*

then $\frac{1}{p^m} h\left(\frac{q}{p}\right) \ll y^m g\left(\frac{x}{y}\right)$ and $\frac{1}{q^m} h\left(\frac{p}{q}\right) \ll x^m g\left(\frac{y}{x}\right)$

* From a generalisation of rule (A) given further, it follows that m need not be an integer. The method of proof here adopted requires however m to be an integer. Prof. Delerue has kindly drawn my attention to this point.

For $m = 0$, we get Delerue's rule (A) in his thesis page 9. To prove this we observe that

$$h(p) = (m+1)! p \int_0^{\infty} \frac{g(x)}{(p+x)^{m+2}} dx$$

so that

$$h\left(\frac{q}{p}\right) = (m+1)! q p^{m+1} \int_0^{\infty} \frac{g(x) dx}{(q+px)^{m+2}}$$

Also if we put

$$\Phi(p, q) = pq \int_0^{\infty} e^{-qy} dy \int_0^{\infty} e^{-px} y^m g\left(\frac{x}{y}\right) dx$$

then on putting $x = yt$ and on simplifying, we have

$$\begin{aligned} \Phi(p, q) &= pq \int_0^{\infty} g(t) dt \int_0^{\infty} e^{-(pt+q)y} y^{m+1} dy \\ &= pq (m+1)! \int_0^{\infty} \frac{g(t)}{(pt+q)^{m+2}} dt. \end{aligned}$$

Hence the result follows.

Since a number of functions $F(x)$ are available for which $p^{-m} F(p)$ has an original, we give here a table of relations obtained from this rule :

$F(x)$

Correspondences obtained

$$e^{-\frac{1}{x}} / x^{\nu+1} \quad \frac{2q^{\frac{\nu}{2}+1}}{p^{\frac{m+\nu}{2}+1}} K_{\nu}\left(2\sqrt{\frac{q}{p}}\right) \ll y^{\frac{m-\nu-1}{2}} x^{\frac{m+\nu+1}{2}} J_{m+\nu+1}\left(2\sqrt{\frac{x}{y}}\right).$$

$$x^m K_0(x) \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{(m!)^2 e^{\frac{p}{2q}}}{q^{m-\frac{1}{2}} \sqrt{p}} W_{-m-\frac{1}{2}, 0}\left(\frac{p}{q}\right) \ll y^m \arg \operatorname{ch} \frac{x}{y}.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x}} K_{2\nu}(a\sqrt{x}) & \quad \frac{\sqrt{\pi q} e^{\frac{a^2 p}{8q}}}{2 \cos \nu \pi \cdot p^{m+\frac{1}{2}}} K_{\nu}\left(\frac{a^2 p}{8q}\right) \ll \frac{y^{2m+1} e^{\frac{a^2 y}{8x}}}{a x^{m+1}} W_{m+1, \nu}\left(\frac{a^2 y}{8x}\right) \\ \left(-\frac{1}{4} < R(2\nu) < \frac{1}{4}\right) & \end{aligned}$$

$$\frac{x^{n+\alpha}}{(1+x)^{n+\alpha+\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{2^{n+\alpha+\frac{1}{2}} \Gamma(n+\alpha+1)}{p^m} \sqrt{\frac{q}{p}} \cdot e^{\frac{q}{2p}} D_{-2n-2\alpha-1} \left(\sqrt{\frac{2q}{p}} \right) \\ \ll \frac{\Gamma(n-m+\alpha)}{\Gamma\left(n+\alpha+\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{x}{y}} I_{n-m+\alpha-1}^{\frac{m+\frac{1}{2}}{y}} \left(\frac{x}{y} \right)$$

$$\frac{e^{1-\frac{1}{x}}}{x^{\nu+1}}$$

$$\frac{2q^{\frac{\nu}{2}+1}}{p^{m+\frac{\nu}{2}+1}} e K_{\nu} \left(2\sqrt{\frac{q}{p}} \right) \ll \frac{x^{\frac{m+\nu+1}{2}}}{y^{\nu+1}} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{I_n^{m+\nu+1} \left(\frac{x}{y} \right)}{\Gamma(m+n+\nu+2)}$$

$$2x^m K_{2m-2\mu}(x)$$

$$\frac{\Gamma(2m-\mu+1) \Gamma(\mu+1)}{q^m} e^{\frac{p}{2q}} \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot W_{-m-\frac{1}{2}, m-\mu} \left(\frac{p}{q} \right) \\ \ll \frac{1}{m-\mu} y^m \operatorname{sh} \left\{ 2(m-\mu) \arg \operatorname{ch} \frac{x}{y} \right\}$$

where $2m-\mu > -1$, $\mu > -1$, $x > 1$.

$$e^{-\sqrt{x}} \cdot x^{m+\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\Gamma(2m+3)}{2^{m+\frac{1}{2}} q^m} \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot e^{\frac{q}{8p}} D_{-2m-3} \left(\sqrt{\frac{p}{2q}} \right) \\ \ll \frac{1}{\sqrt{\pi}} y^{m+\frac{1}{2}} \frac{e^{-\frac{y}{4x}}}{\sqrt{x}}.$$

$$e^{-ax} I_{m+1}(ax) \\ 0 < x < 2a$$

$$\frac{qa^{m+1}}{\sqrt{(q+ap)^2 - a^2p^2}} \times \frac{p}{[q+ap + \sqrt{(q+ap)^2 - a^2p^2}]^{m+1}} \\ \ll \begin{cases} \frac{y^m}{(2a)^{m+1} \sqrt{\pi} \Gamma\left(m+\frac{3}{2}\right)} \left(2a \frac{x}{y} - \frac{x^2}{y^2} \right)^{m+\frac{1}{2}}, & 0 < \frac{x}{y} < 2a \\ 0 & \text{if } \frac{x}{y} < 0 \text{ or } \frac{x}{y} > 2a. \end{cases}$$

This result can be generalised to symbolic calculus of n variables thus :

If $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset_n h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ and if

$g(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset_n p_1^{-m_1} p_2^{-m_2} \dots p_n^{-m_n} F(p_1, p_2, \dots, p_n)$, then

$$\frac{1}{p_1^{m_1} p_2^{m_2} \dots p_n^{m_n}} h \left(\frac{p_{n+1}}{p_1}, \dots, \frac{p_{2n}}{p_n} \right) \subset_{2n} x_{n+1}^{m_1} \dots x_{2n}^{m_n} g \left(\frac{x_1}{x_{n+1}}, \dots, \frac{x_n}{x_{2n}} \right).$$

The proof follows the same lines as above.

We can also extend the rule to more sequences than one thus :

Let $F_1(x) \supset h(p)$, $F_2(x) \supset p^{-m_1} F_1(p)$, and $F_3(x) \supset p^{-m_2} F_2(p)$, then we have

$$\frac{p^{m_1-m_2}}{q^{m_1}} h\left(\frac{pr}{q}\right) \subset_3 p^{m_1-m_2} p^{m_2} F_3\left(\frac{XZ}{Y}\right)$$

To prove this we observe that

$$h(p) = p \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xt-tu} x^{m_1+1} t^{m_2+1} F_3(u) du dt dx$$

Hence

$$h\left(\frac{pr}{q}\right) = \frac{pr}{q} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\frac{pr}{q}x-xt-tu} x^{m_1+1} t^{m_2+1} F_3(u) du dt dx$$

Put $\frac{xr}{q} = X$, $xt = q Y$ and $tu = rZ$, so that $u = \frac{XZ}{Y}$.

On making this substitution we get the required result.

2. We shall now prove the rule

(B) If $F(x) \supset h(p)$ and $\frac{1}{p^\lambda} F\left(\frac{1}{p^\mu}\right) \subset \sigma(x)$, then

$$\frac{1}{p^\lambda} h(p^\mu q) \ll \frac{1}{p^{\lambda/\mu}} \sigma\left(xy \frac{1}{\mu}\right)$$

To prove this we observe that $h(p) = p \int_0^\infty e^{-pt} F(t) dt$ and

$p^{-\lambda} F\left(\frac{1}{p^\mu}\right) = p \int_0^\infty e^{-ps} \sigma(s) ds$. Putting $p^{-\mu} = t$ in the second

relation and combining it with the first one, we have

$$h(p) = p \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-pt-t \frac{s}{1/\mu}}}{t^{\frac{1+\lambda}{\mu}}} \sigma(s) ds dt$$

Writing $p^\mu q$ for p , we have

$$h(p^\mu q) = p^\mu q \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{e^{-p^\mu q t - t^{1/\mu}}}{t^{\frac{1+\lambda}{\mu}}} \sigma(s) ds dt$$

Again, putting $s^\mu = tx^\mu p^\mu$ and $p^\mu t = y$, we have on simplifying

$$\frac{1}{p^\lambda} h(p^\mu q) = pq \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-px-xy} \frac{1}{y^{\lambda/\mu}} \sigma(xy^{\frac{1}{\mu}}) dx dy$$

Hence the result follows.

Example 1. Let $F(x) = x^n e^{-x} \supset \frac{\Gamma(n+1)p}{(p+1)^{n+1}} = h(p)$

Then $\frac{1}{p^{km}} F\left(\frac{1}{p^m}\right) = \frac{e^{-1/p^m}}{p^{km+mn}}$

$$\subset \frac{x^{km+mn}}{\Gamma(km+mn+1)} {}_0F_m\left(k+n+\frac{1}{m}, \dots, k+n+1; -\left(\frac{x}{m}\right)^m\right)$$

Hence

$$\frac{\Gamma(n+1)p^mq}{p^{mk}(p^mq+1)^{n+1}} \ll \frac{x^{km+mn}y^n}{\Gamma(km+mn+1)} {}_0F_m\left(k+n+\frac{1}{m}, \dots, k+n+1; -\frac{x^my}{m^m}\right)$$

Example 2. On taking $F(x) = e^{-ax}$, we get the correspondence

$$\frac{q}{p^{km-m}(p^mq+a)} \ll \frac{x^{km}}{\Gamma(km+1)} {}_0F_m\left(k+\frac{1}{m}, \dots, k+\frac{m-1}{m}, k+1; -a\frac{x^my}{m^m}\right)$$

(Prof. Delerue has kindly informed me that this is already given in DOESTCH and VOELCKER p. 222 N° 146.

For $\mu = 1$, we get the rule (B) given by P. Delerue in his thesis p. 10.

The corresponding rule for n variables will be :

If $F(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset_n h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ and if

$$p_1^{-\lambda_1} p_2^{-\lambda_2} \dots p_n^{-\lambda_n} h(p_1^{\mu_1} p_{n+1}, p_2^{\mu_2} p_{n+2} \dots, p_n^{\mu_n} p_{2n})$$

$$\subset \frac{1}{x_{n+1}^{\lambda_1/\mu_1} x_{n+2}^{\lambda_2/\mu_2} \dots x_{2n}^{\lambda_n/\mu_n}} \sigma(x_1 x_{n+1}^{1/\mu_1}, x_2 x_{n+2}^{1/\mu_2}, \dots, x_n x_{2n}^{1/\mu_n}).$$

If we consider the sequence

$$F_1(x) \supset h(p), \quad \frac{1}{p^{\lambda_1}} F_1\left(\frac{1}{p^{\mu_1}}\right) \subset F_2(x), \text{ and } \frac{1}{p^{\lambda_2}} F_2\left(\frac{1}{p^{\mu_2}}\right) \subset F_3(x),$$

then we have

$$\frac{1}{p^{\lambda_1} q^{\lambda_2 + \mu_2 \lambda_1}} h(p^{\mu_1} q^{\mu_1 \mu_2} r) \subset \frac{1}{x^{\lambda_2/\mu_2} z^{\lambda_2 + \lambda_1 \mu_2}} F_3\left(\frac{1}{x^{\mu_2}} y^{\mu_1 \mu_2}\right)$$

For $\mu = 1$, we get the following result :

$$\text{If } F(x) \supset h(p), \quad \frac{1}{p^{\lambda}} F\left(\frac{1}{p}\right) \subset g(x) \text{ and } \frac{1}{p^{\mu}} g\left(\frac{1}{p}\right) \subset H(x)$$

then (*)

$$(i) \quad \frac{1}{p^{\lambda + \mu} q^{\lambda}} h(pqr) \subset \frac{1}{y^{\mu} z^{\lambda + \mu}} H(xyz)$$

$$(ii) \quad \frac{1}{q^{\lambda} r^{\lambda + \mu}} h(pqr) \subset \frac{H(xyz)}{x^{\lambda + \mu} y^{\mu}}$$

$$(iii) \quad \frac{1}{p^{\lambda} q^{\lambda + \mu}} h(pqr) \subset \frac{1}{x^{\mu} z^{\lambda + \mu}} H(xyz).$$

The proof is based on the method of proving rule (B).

3. We shall now prove the rule

(C) If $f(x) \supset h(p)$ and if $\sqrt{x} f(\sqrt{x}) \supset \Phi(p)$, then

$$\frac{pq h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \ll \frac{1}{2\pi (x+y) \sqrt{xy}} \Phi\left(\frac{x+y}{4xy}\right)$$

* One of these results, no (i), has been given by Delerue for n sequences. It is easy to see that for n sequences, we can get many combinations which imply changes in $p_1, p_2 \dots p_n$.

This is analogous to the following rule of P. Delerue :

If $f(x) \supset h(p)$ and if $\frac{1}{\sqrt{x}} f(\sqrt{x}) \supset \Phi(p)$, then

$$\frac{\sqrt{pq} h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \ll \frac{2\sqrt{xy}}{\pi(x+y)} \Phi\left(\frac{x+y}{4xy}\right).$$

To prove (C) we observe that

$$\frac{h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} = \int_0^\infty \frac{e^{-s\sqrt{p}-s\sqrt{q}}}{s^2} \cdot s^2 f(s) ds.$$

Again, since $\frac{pe^{-s\sqrt{p}}}{s} \subset \frac{e^{-\frac{s^2}{4x}}}{2\sqrt{\pi}} x^{-\frac{3}{2}}$, we have on simplification

$$pq \frac{h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \ll \frac{1}{8\pi} \int_0^\infty e^{-\frac{x+y}{4xy}u} \frac{\sqrt{u} f(\sqrt{u})}{(xy)^{3/2}} du.$$

Also, since $\Phi(p) \subset \sqrt{x} f(\sqrt{x})$, we have

$$\Phi\left(\frac{x+y}{4xy}\right) = \frac{x+y}{4xy} \int_0^\infty e^{-\frac{x+y}{4xy}u} \sqrt{u} f(\sqrt{u}) du.$$

Hence the result follows. Some new symbolic correspondences obtained by this rule are listed below.

$f(x)$ *Correspondences obtained*

$$x^n \cdot \frac{pq}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{n+1}} \ll \frac{2^n \Gamma\left(\frac{n+3}{2}\right)}{\pi \Gamma(n+1)} \frac{(xy)^{n/2}}{(x+y)^{\frac{n+3}{2}}}$$

$$\begin{cases} 1, & x > 1 \\ x, & x = 1 \\ 0, & x < 1 \end{cases} - pq \operatorname{Ei}(-\sqrt{p} - \sqrt{q}) \ll \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}(x+y)} \cdot e^{-\frac{x+y}{4xy}}$$

$$\frac{x}{1+x^2} - pq [\cos(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \operatorname{ci}(\sqrt{p} + \sqrt{q}) + \sin(\sqrt{p} + \sqrt{q}) \operatorname{si}(\sqrt{p} + \sqrt{q})]$$

$$\begin{aligned}
 & \ll \frac{1}{2\pi\sqrt{xy}(x+y)} \left[1 + \frac{x+y}{4xy} e^{\frac{x+y}{4xy}} \operatorname{Ei} \left(-\frac{x+y}{4xy} \right) \right]. \\
 \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} & \frac{\pi pq}{2} [\operatorname{H}_0(\sqrt{p} + \sqrt{q}) - \operatorname{Y}_0(\sqrt{p} + \sqrt{q})] \\
 & \ll \frac{1}{4\sqrt{\pi xy}(x+y)} \cdot e^{\frac{x+y}{8xy}} W_{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}} \left(\frac{x+y}{4xy} \right) \\
 e^{-2x} & \frac{pq}{\sqrt{p} + \sqrt{q} + 2} \ll \frac{\sqrt{2}}{\pi} \cdot \frac{e^{\frac{2xy}{x+y}}}{(x+y)^{3/2}} D_{-3} \left(\sqrt{\frac{8xy}{x+y}} \right) \\
 e^{-x^2} & pq e^{\frac{1}{4}(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{2} \ll \frac{1}{\pi(x+y+4xy)^{3/2}} \\
 xe^{-x^2} & pq \left[1 - \frac{\sqrt{\pi}}{2} (\sqrt{p} + \sqrt{q}) e^{\frac{1}{4}(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2} \operatorname{erfc} \frac{\sqrt{p} + \sqrt{q}}{2} \right] \\
 & \ll \frac{4}{\pi} \frac{\sqrt{xy}}{(x+y+4xy)^2} \\
 x^{2\nu+1} e^{-x} & \frac{pq}{(\sqrt{p} + \sqrt{q} + 1)^{2\nu+2}} \ll \frac{2^\nu(2\nu+3)(2\nu+2)e^{\frac{xy}{2(x+y)}}}{\pi(x+y)^{\nu+2}} (xy)^{\nu+\frac{1}{2}} \times \\
 & \times D_{-2\nu-4} \left(\sqrt{\frac{2xy}{x+y}} \right)
 \end{aligned}$$

4. We now come to rule

(D) If $f(x) \supset h(p)$ and if $g(\sqrt{p}) \subset \Phi(x)$, where

$$g(p) = p \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{h(p)}{p} \right), \text{ then}$$

$$pq \frac{h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \ll \frac{1}{4xy\sqrt{\pi(x+y)}} \Phi \left(\frac{xy}{x+y} \right)$$

In order to prove this we observe that as shown earlier

$$\frac{pq h(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}} \ll \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{s^2}{4} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right)}}{(xy)^{3/2}} s^2 f(s) ds. \quad (4.1)$$

Also since $g(p) \subset t^2 f(t)$ by virtue of its definition, and since

$$h(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} f(s) ds$$

when $h(p) \subset f(t)$, we find that

$$g(\sqrt{p}) \subset \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-\frac{s^2}{4t}} s^2 f(s) ds.$$

Putting $\frac{1}{t} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ and comparing with (4.1) we get the required result. The following list of correspondences is obtained from this rule :

$h(p)$	<i>Correspondences obtained</i>	
$\frac{1}{p}$	$\frac{pq}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2}$	$\ll \frac{2}{\pi} \frac{\sqrt{xy}}{(x+y)^2}$
$\frac{1}{p^{2r}}$	$\frac{pq}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2r+1}}$	$\ll \frac{(2r+1)(2r+2)}{\Gamma(r+2) 4\sqrt{\pi}} \frac{(xy)^r}{(x+y)^{r+3/2}}$
$\frac{p^2}{p^2+1}$	$\frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 + 1}$	$\ll \frac{e^{-\frac{xy}{x+y}}}{2\sqrt{\pi}(x+y)^3} \left(1 - \frac{2xy}{x+y}\right)$
$\frac{p^2}{p^2-1}$	$\frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^2 - 1}$	$\ll \frac{e^{\frac{xy}{x+y}}}{2\sqrt{\pi}(x+y)^{3/2}} \left(1 + \frac{2xy}{x+y}\right)$
$\frac{p^4}{p^4+1}$	$\frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})^3}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^4 + 1}$	$\ll \frac{\cos \frac{xy}{x+y} - \frac{2xy}{x+y} \sin \frac{xy}{x+y}}{2\sqrt{\pi}(x+y)^{3/2}}$
$\frac{p^4}{p^4-1}$	$\frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})^3}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^4 - 1}$	$\ll \frac{\cosh \frac{xy}{x+y} + \frac{2xy}{x+y} \sinh \frac{xy}{x+y}}{2\sqrt{\pi}(x+y)^{3/2}}$
$1/\log p^2$	$\frac{2pq \log(\sqrt{p} + \sqrt{q})}{\sqrt{p} + \sqrt{q}}$	$\ll \frac{(xy)^2}{2\sqrt{\pi}(x+y)^2} \left[+ 2\gamma \sqrt{\frac{\pi xy}{x+y}} - \log \frac{xy}{4(x+y)} - \Psi\left(\frac{3}{2}\right) \right].$

$$\frac{p^{2k}}{p^{2n} + 1} \frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2k-1}}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n} + 1} \ll \frac{2}{\pi} \frac{xy}{(x+y)^{5/2}} \left[-\frac{xy}{x+y} f' \left(\frac{xy}{x+y}, k+1, n \right) + f \left(\frac{xy}{x+y}, k, n \right) \right].$$

$$\frac{p^{2k}}{p^{2n} - 1} \frac{pq(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2k-1}}{(\sqrt{p} + \sqrt{q})^{2n} - 1} \ll \frac{2}{\pi} \frac{xy}{(x+y)^{5/2}} \left[-\frac{xy}{x+y} h' \left(\frac{xy}{x+y}, k+1, n \right) + h \left(\frac{xy}{x+y}, k, n \right) \right].$$

The rules (C) and (D) are in fact supplementing each other. We can, indeed, derive the following relation from comparing (C) and (D), which also provides a working rule in finding out correspondences :

If $f(x) \supset h(p)$, $\sqrt{x} f(\sqrt{x}) \supset \Phi(p)$ and if $g(p) \subset \Psi(x)$ where

$g(p) = p \frac{d^2}{dp^2} \left(\frac{h(p)}{p} \right) \subset x^2 f(x)$, then

$$\Psi(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} \Phi \left(\frac{1}{4x} \right).$$

The corresponding generalisations of rules (C) and (D) to n variables are :

(C') If $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset h(p_1, p_2, \dots, p_n)$ and if

$\sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} f(\sqrt{x_1}, \sqrt{x_2}, \dots, \sqrt{x_n}) \supset \Phi(p_1, p_2, \dots, p_n)$ then

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n h(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_{n+1}}, \sqrt{p_2} + \sqrt{p_{n+2}}, \dots, \sqrt{p_n} + \sqrt{p_{2n}})}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_{n+1}}) \dots (\sqrt{p_n} + \sqrt{p_{2n}})} \subset_{2n} \Phi \left(\frac{x_1 + x_{n+1}}{4x_1 x_{n+1}}, \frac{x_2 + x_{n+2}}{4x_2 x_{n+2}}, \dots, \frac{x_n + x_{2n}}{4x_n x_{2n}} \right)$$

and

(D') If $f(x_1, \dots, x_n) \supset h(p_1, \dots, p_n)$ and if $g(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_n})$

$\subset \Psi(x_1, x_2, \dots, x_n)$ where

$$g(p_1, \dots, p_n) = p_1 p_2 \dots p_n \frac{\partial^{2n}}{\partial p_1^2 \dots \partial p_n^2} \left(\frac{h(p_1, p_2, \dots, p_n)}{p_1 p_2 \dots p_n} \right)$$

then

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n h(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_{n+1}}, \dots, \sqrt{p_n} + \sqrt{p_{2n}})}{(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_{n+1}}) \dots (\sqrt{p_n} + \sqrt{p_{2n}})}$$

$$\stackrel{C}{\sim} \frac{\Psi\left(\frac{x_1 x_{n+1}}{x_1 + x_{n+1}}, \frac{x_2 x_{n+2}}{x_2 + x_{n+2}}, \dots, \frac{x_n x_{2n}}{x_n + x_{2n}}\right)}{(x_1 x_2 \dots x_n) 4^n \pi^{\frac{n}{2}} \sqrt{(x_1 + x_{n+1}) \dots (x_n + x_{2n})}}$$

Another generalisation of (C) is

(C'') If $f(x) \supset h(p)$ and if $x^{\frac{n-1}{2}} f(\sqrt{x}) \supset \Phi(p)$, then

$$\frac{p_1 p_2 \dots p_n h(\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n})}{\sqrt{p_1} + \sqrt{p_2} + \dots + \sqrt{p_n}}$$

$$\stackrel{C}{\sim} \frac{\Phi\left(\frac{1}{4x_1} + \dots + \frac{1}{4x_n}\right)}{2^{\frac{n}{2}} \pi^{\frac{n}{2}} (x_1 x_2 \dots x_n)^{3/2} \left(\frac{1}{x_1} + \dots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

I take this opportunity to express my gratitude to Dr. A. Sharma for his help and guidance in the preparation of this paper.

REFERENCES

1. DELERUE, P. — Theses 1951. Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes.
2. DELERUE, P. — Sur quelques images en calcul symbolique à trois ou n variables. *Bull. des Sci. Math.* 76, 1952 p.1-10.
3. McLACHLAN and HUMBERT — Formulaire pour la calcul symbolique (1941).
4. McLACHLAN, HUMBERT and POLI — Supplement au formulaire (1950).

Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes

DEUXIEME PARTIE

Fonctions Hyperbesséliennes

CHAPITRE I

DEFINITION ET IMAGE EN CALCUL SYMBOLIQUE A UNE ET n VARIABLES

PAR

P. DELERUE

I. DÉFINITIONS

1. *Fonctions* $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$. Nous généraliserons les fonctions J_ν de Bessel qui, on le sait, peuvent être définies par

$$J_\nu(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^\nu}{\Gamma(\nu+1)} {}_0F_1\left(\nu+1; -\frac{x^2}{4}\right)$$

en prenant une fonction à n indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$

$$J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1+1)\Gamma(\lambda_2+1)\dots\Gamma(\lambda_n+1)} {}_0F_n\left[\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1; -\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1}\right]$$

Ces fonctions seront appelées fonctions hyperbesséliennes J d'ordre n et d'indices $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$. Cette définition n'a évidemment de sens que si $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne sont pas des entiers négatifs. Pour donner un sens à la fonction dans ce cas, nous poserons, par définition

$$e^{\frac{x}{n+1}(u_1+u_2+\dots+u_n)} \frac{1}{u_1 u_2 \dots u_n} = \sum_{m_1=-\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n=-\infty}^{+\infty} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_n^{m_n} J_{m_1 m_2 \dots m_n}^{(n)}(x)$$

où les nombres m_1, m_2, \dots, m_n sont des entiers. Si ces entiers sont positifs, le développement en série du premier membre redonnera la formule (A)

$$J_{m_1, m_2, \dots, m_n}^{(n)}(x) = \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^{m_1+m_2+\dots+m_n}}{m_1! m_2! \dots m_n!} {}_oF_n \left[m_1+1, m_2+1, \dots, m_n+1; -\left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \right]$$

Si les entiers m_1, m_2, \dots, m_n ne sont pas tous positifs, on peut toujours supposer les indices rangés par ordre croissant : $-m_1, -m_2, \dots, -m_k, +m_{k+1}, \dots, +m_n$

On aura alors

$$(B) \quad J_{-m_1, -m_2, \dots, -m_k, +m_{k+1}, \dots, +m_n}^{(n)} = (-1)^{m_1} J_{m_1, m_2, \dots, m_k, m_1+m_{k+1}, \dots, m_1+m_n}^{(n)}$$

En effet, si dans la fonction génératrice on change une des variables u_1, u_2, \dots, u_n par une nouvelle variable t telle que $u_1 u_2 \dots u_n = -\frac{1}{t}$, le développement se mettra sous la forme

$$\Sigma \dots \Sigma t^{\alpha_1} u_2^{\alpha_2} u_3^{\alpha_3} \dots u_n^{\alpha_n} J_{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n}^{(n)} = \Sigma \dots \Sigma (-1)^{\alpha_1} u_1^{-\alpha_1} u_2^{\alpha_2} \dots u_n^{\alpha_n - \alpha_1} J_{\alpha_1, \alpha_2, \dots}^{(n)}$$

et si, dans le premier développement k exposants sont négatifs, on posera

$$\alpha_1 = m_1 \quad \alpha_1 - \alpha_2 = m_2 \quad \dots \quad \alpha_1 - \alpha_k = m_k \quad \alpha_{k+1} - \alpha_1 = m_{k+1} \dots$$

$$\alpha_n - \alpha_1 = m_n$$

ce qui donne la relation annoncée (B). Cette relation permettra aussi de définir J quand certains indices seront des entiers négatifs, les autres indices étant des nombres positifs non entiers.

2. Fonctions $I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$. Elles généralisent les fonctions I_ν de Bessel et sont définies de façon semblable par

$$(C) \quad I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1+1) \Gamma(\lambda_2+1) \dots \Gamma(\lambda_n+1)} {}_oF_n \left[\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1; +\left(\frac{x}{n+1}\right)^n \right]$$

Pour donner un sens à cette expression quand certains des indices sont des entiers négatifs, on posera par définition

$$\frac{x}{x+1} \left(u_1 + u_2 + \dots + u_n + \frac{1}{u_1 u_2 \dots u_n} \right) = \sum_{m_1 = -\infty}^{+\infty} \sum_{m_2 = -\infty}^{+\infty} \dots \sum_{m_n = -\infty}^{+\infty} u_1^{m_1} u_2^{m_2} \dots u_n^{m_n} I_{m_1, m_2, \dots, m_n}^{(n)}(x)$$

Cette définition coïncide avec la précédente si m_1, m_2, \dots, m_n sont des nombres entiers positifs. Si certains indices sont entiers négatifs, on obtiendra

$$I_{-m_1, -m_2, \dots, -m_k, m_k+1, \dots, m_n}^{(n)} = I_{m_1, m_1-m_2, \dots, m_1-m_k, m_1+m_k+1, \dots, m_1+m_n}^{(n)}$$

I et J sont la même fonction si on utilise des arguments complexes puisque

$$I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left(x e^{\frac{i\pi}{n+1}} \right) = e^{\frac{i\pi}{n+1}(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$$

3. Fonctions $\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$ et $\text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$

Avec les fonctions de Bessel ordinaires, on introduit $\text{ber}_\nu(x)$ et $\text{bei}_\nu(x)$ en posant par définition $\text{ber}_\nu(x) + i \text{bei}_\nu(x) = I_\nu(x\sqrt{i})$

On généraliserait donc ces fonctions en écrivant

$$(D) \quad \text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + i \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[x i^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

C'est cette définition qui se présente la première. Nous avons pourtant préféré poser

$$(E) \quad i^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n+1}} [\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + i \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)] = I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[x i^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

Cette définition (E) a l'inconvénient de ne pas redonner pour $n = 1$ les fonctions de Kelvin ber_ν et bei_ν . Mais, elle a l'avantage de présenter plus simplement les images et les propriétés qui seront données plus loin. Il est d'ailleurs facile de passer de la définition (D) à la définition (E). Pour plus de clarté, nous désignerons par $\text{Ber}^{(n)}$ et $\text{Bei}^{(n)}$ les fonctions définies par (D).

Nous aurons les relations

$$\text{Ber}^{(n)} + i \text{Bei}^{(n)} = e^{\frac{i\pi}{2} \frac{(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)}{n+1}} [\text{ber}^{(n)} + i \text{bei}^{(n)}]$$

$$\text{Ber}^{(n)} + i \text{Bei}^{(n)} = (\cos \pi \alpha + i \sin \pi \alpha) (\text{ber}^{(n)} + i \text{bei}^{(n)})$$

où on a posé $\alpha = \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{2(n+1)}$ On a donc

$$\text{Ber}^{(n)} = (\cos \pi \alpha) \text{ber}^{(n)} - (\sin \pi \alpha) \text{bei}^{(n)}$$

$$\text{Bei}^{(n)} = (\cos \pi \alpha) \text{bei}^{(n)} + (\sin \pi \alpha) \text{ber}^{(n)}$$

Les deux définitions coïncident évidemment si $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0$ ou plus généralement si α est un entier pair.

A partir de la définition (E) que nous utiliserons par la suite, on obtient, si on développe en série $\text{I}^{(n)}$

$$\text{I}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{x}{n+1}\right)^{k(n+1)}}{\Gamma(\lambda_1 + k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + k + 1) k!}$$

$$\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{n+1}\right)^{2k(n+1)}}{\Gamma(\lambda_1 + 2k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 2k + 1) (2k)!}$$

$$\text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{n+1}\right)^{(2k+1)(n+1)}}{\Gamma(\lambda_1 + 2k + 2) \dots \Gamma(\lambda_n + 2k + 2) (2k+1)!}$$

En particulier, si on envisage les fonctions d'ordre 2 et d'indices 0, 0

$$\text{ber}_{0,0}(x) = 1 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^6}{[2!]^3} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{12}}{[4!]^3} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{3}\right)^{6k}}{[(2k)!]^3} + \dots$$

$$\text{bei}_{0,0}(x) = \left(\frac{x}{3}\right)^3 - \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^9}{(3!)^3} + \frac{\left(\frac{x}{3}\right)^{15}}{[5!]^3} - \dots + \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{3}\right)^{3(2k+1)}}{[(2k+1)!]^3} + \dots$$

II. IMAGE DE CES FONCTIONS EN CALCUL SYMBOLIQUE A UNE VARIABLE

Nous allons établir les relations symboliques

$$(1) \ x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \supset \frac{1}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}}} J_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left[\frac{n}{\sqrt{p}} \right]$$

$$(2) \ x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \supset \frac{1}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}}} I_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left[\frac{n}{\sqrt{p}} \right]$$

$$(3) \ x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} \text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \supset \frac{1}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}}} \text{ber}_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left[\frac{n}{\sqrt{p}} \right]$$

et une expression analogue à la dernière en changeant ber en bei.

En effet, le premier membre de (1) s'écrit

$$\frac{x^{\lambda_1}}{(1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)} {}_0F_n[\lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1; -x] = x^{\lambda_1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^k}{\Gamma(\lambda_1 + k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + k + 1) k!}$$

dont l'image est

$$\sum_k \frac{(-1)^k}{\Gamma(\lambda_2 + k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + k + 1) k!} \frac{1}{p^{k - \lambda_1}} = \frac{1}{p^{\lambda_1}} \frac{{}_0F_{n-1} \left(\lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1; -\frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\lambda_2 + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)}$$

$$\text{Or, } \frac{1}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}}} J_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left[\frac{n}{\sqrt{p}} \right] = \frac{1}{p^{\lambda_1}} \frac{{}_0F_{n-1} \left(\lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1; -\frac{1}{p} \right)}{\Gamma(\lambda_2 + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)}$$

La formule (1) en résulte immédiatement. Les formules (2) et (3) ont été obtenues par la même méthode. On a aussi la correspondance symbolique

$$J_{\lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \supset \frac{1}{p^{h'}} \frac{\Gamma(h' + 1)}{\Gamma(\lambda_1 + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)} {}_1F_n \left(h' + 1; \lambda_1 + 1, \dots, \lambda_n + 1; -\frac{1}{p} \right)$$

$$\text{où } h' = h + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n + 1}$$

Même relation avec les fonctions $I^{(n)}$ en remplaçant dans la fonction hypergéométrique qui figure dans l'image — $\frac{1}{p}$ par $\frac{1}{\hat{p}}$.

III. IMAGE DE CES FONCTIONS EN CALCUL SYMBOLIQUE A n VARIABLES

Considérons la fonction de n variables

$$\frac{x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \dots x_n^{\lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1 + 1) \Gamma(\lambda_2 + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 1)} {}_0F_n(\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1; x_1 x_2 \dots x_n)$$

et faisons correspondre à x_1, x_2, \dots, x_n les variables symboliques p_1, p_2, \dots, p_n . Un calcul analogue au précédent montre que l'image est

$$\frac{1}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}} \frac{1}{e^{p_1 p_2 \dots p_n}}$$

On déduira de là les deux images en calcul symbolique à n variables

$$(4) \left[\prod_{i=1}^n x_i \right] \frac{n\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_{i-1} - 1 - \dots - \lambda_n}{n+1} \left[I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \right] \right] \frac{1}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}} e^{p_1 p_2 \dots p_n}$$

$$(5) \left[\prod_{i=1}^n x_i \right] \frac{n\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_{i-1} - 1 - \dots - \lambda_n}{n+1} \left[J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \right] \right] \frac{1}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}} e^{p_1 p_2 \dots p_n}$$

On pourra écrire aussi

$$(6) \left[\prod_{i=1}^n x_i \right] \frac{n\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_2 \dots - \lambda_{i-1} - 1 - \dots - \lambda_n}{n+1} \left[\begin{matrix} \text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \\ \text{bei} \end{matrix} \left[(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n} \right] \right] \frac{1}{p_1^{\lambda_1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}} \cos \frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n}$$

En effet, dans le cas de la fonction ber par exemple, le premier membre s'écrit

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x_1^{2k+\lambda_1} \dots x_n^{2k+\lambda_n}}{\Gamma(\lambda_1 + 2k + 1) \dots \Gamma(\lambda_n + 2k + 1) (2k)!}$$

son image est

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p_1^{2k+\lambda_1} \dots p_n^{2k+\lambda_n}} \times \frac{1}{(2k)!} = \frac{1}{p_1^{\lambda_1} \dots p_n^{\lambda_n}} \cos \frac{1}{p_1 \dots p_n}$$

CHAPITRE II

RELATIONS DE RECURRENCE ET DEVELOPPEMENTS EN SERIE

DÉVELOPPEMENTS

Certains développements concernant les fonctions $J_{m,n}$ ont déjà été donnés par Monsieur Humbert. Nous allons en donner d'autres et surtout généraliser à des fonctions hyperbesséliennes d'ordre quelconque. Le méthode utilisée sera la suivante. On partira d'un développement connu pour les fonctions des Bessel ordinaires : on y

changera x en $\frac{2}{\sqrt{p}}$ et à l'aide de la formule

$$x^{\frac{2m-n}{3}} J_{m,n}(3\sqrt{x}) \supset \frac{1}{p^{\frac{2m-n}{2}}} J_n\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$$

on en déduira un développement pour les fonctions $J_{m,n}$. Une méthode de récurrence utilisant les relations symboliques établies dans le chapitre précédent permettra d'étendre aux fonctions hyperbesséliennes d'ordre quelconque. Comme on connaît de multiples développements pour les fonctions de Bessel ordinaires, on pourra écrire de nombreuses relations.

1. Monsieur Humbert a donné la relation

$$x J_{1,1}(x) = 6 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n n J_{2n,n}(x)$$

On peut la généraliser en partant du développement

$$x J_{\nu-1}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu + 2n) J_{\nu+2n}(x)$$

Multiplions les deux membres par x^k , puis changeons x en $\frac{2}{\sqrt{p}}$

$$\frac{1}{p^{\frac{k+1}{2}}} J_{\nu-1}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu + 2n) \cdot \frac{1}{p^{\frac{3}{2}}} J_{\nu+2n}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$$

En remontant aux originaux et en changeant $3\sqrt{x}$ en x , nous obtiendrons

$$x J_{\frac{\nu+k}{2}, \nu-1}(x) = 3 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (\nu + 2n) J_{\frac{k+\nu+2n}{2}, \nu+2n}(x)$$

ou en changeant les notations

$$(A) \quad x J_{m,n}(x) = 3 \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} (n + 1 + 2\lambda) J_{m+\lambda, n+1+2\lambda}(x)$$

Un développement analogue à (A) pour les fonctions hyperbesséliennes

$$(A') \quad x J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} = (n+1) \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_1 + 1 + 2k) J_{\lambda_1+2k+1, \lambda_2+k, \dots, \lambda_n+k}^{(n)}$$

sera établi par récurrence. Nous admettons donc la formule

$$x J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}^{(n-1)}(x) = n \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_2 + 2k + 1) J_{\lambda_1+2k+1, \lambda_2+k, \dots, \lambda_{n-1}+k}^{(n-1)}(x)$$

Multiplions par $\left(\frac{x}{n}\right)^l$ les deux membres de cette relation, puis changeons x en $\frac{n}{\sqrt{p}}$. Nous obtenons

$$\frac{1}{p^{\frac{l+1}{2}}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}^{(n-1)}\left(\frac{n}{\sqrt{p}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_1 + 2k + 1) \frac{1}{p^l} J_{\lambda_1+2k+1, \lambda_2+k, \dots, \lambda_{n-1}+k}^{(n-1)}\left(\frac{n}{\sqrt{p}}\right)$$

La relation (1) de la page 233 permettra de remonter aux originaux. On aura

$$x^{\frac{1}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}}^{(n)} \left[\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + l + 1}{n} (n+1) \sqrt{x} \right] =$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (\lambda_1 + 2k + 1) J_{\lambda_1 + 2k + 1, \lambda_2 + k, \dots, \lambda_{n-1} + k, \frac{\lambda_1 + \dots + \lambda_{n-1} + nK + 1 + l}{n}} (n+1) \sqrt{x}$$

En posant $\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_{n-1} + l + 1}{n} = \lambda_n$ et en changeant

$(n+1) \sqrt{x}$ en x , on obtiendra la relation A !

2^e Exemple. Généralisons aux fonctions hyperbesséliennes les relations connues pour les fonctions de Bessel

$$(7) \quad \cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(x) \cos 2n \theta$$

$$(8) \quad \sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{2n+1}(x) \sin(2n+1) \theta$$

Pour cela, nous chercherons d'abord l'original de $\frac{1}{p^k} \cos\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$

ou de $\frac{1}{p^k} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$. Puisque

$$\frac{1}{p^k} \cos \frac{2}{\sqrt{p}} = \sqrt{\pi} \cdot \frac{1}{p^{k+\frac{1}{2}}} J_{\mp \frac{1}{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right)$$

on a immédiatement

$$\frac{1}{p^k} \cos \frac{2}{\sqrt{p}} \subset \sqrt{\pi} x^{\frac{4K-1}{6}} J_{K, -\frac{1}{2}}(3\sqrt{x})$$

et si on change p en $\frac{p}{\sin^2 \theta}$, donc x en $x \sin^2 \theta$

$$\frac{1}{p^k} \cos\left(\frac{2 \sin \theta}{\sqrt{p}}\right) \subset \sqrt{\pi} \sin^{\frac{1-2k}{3}} \theta \cdot x^{\frac{4K+1}{6}} J_{K, -\frac{1}{2}}(3\sqrt{x \sin^2 \theta})$$

On aura de même $\frac{1}{p^k} \sin\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \subset \sqrt{\pi} x^{\frac{4K+1}{6}} J_{\frac{2k+1}{2}, \frac{1}{2}}(3\sqrt{x})$

$$\text{et } \frac{1}{p^k} \sin\left(\frac{2 \sin \theta}{\sqrt{p}}\right) \subset \sqrt{\pi} \sin^{\frac{1-2k}{3}} \theta x^{\frac{4K+1}{6}} J_{\frac{2k+1}{2}, \frac{1}{2}}(3\sqrt{x})$$

Dès lors, si on multiplie les deux membres de (7) par $\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}$ et si on remplace dans la relation obtenue x par $\frac{2}{\sqrt{p}}$, nous aurons

$$(7') \quad \frac{1}{p^k} \cos\left(\frac{2 \sin \theta}{\sqrt{p}}\right) = \frac{1}{p^k} J_0\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{p^k} J_{2n}\left(\frac{2}{\sqrt{p}}\right) \cos 2n \theta.$$

En remontant aux originaux, on obtiendra après quelques simplifications

$$(B) \quad \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1-2k}{3}} \theta J_{k, -\frac{1}{2}}\left(x \sin^{\frac{2}{3}} \theta\right) = J_{k,0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{k+n, 2n}(x) \cdot \cos 2n$$

En faisant un calcul analogue à partir de (8), on obtiendra le développement

$$(C) \quad \sqrt{\pi} \left(\frac{x}{3}\right)^{\frac{1}{2}} \sin^{\frac{1-2k}{3}} \theta J_{\frac{2k+1}{2}, \frac{1}{2}}\left(x \sin^{\frac{2}{3}} \theta\right) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} J_{k+\frac{2n+1}{2}, 2n+1}(x) \cdot \sin(2n+1)$$

En particulier, si on fait $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{3}} J_{k, -\frac{1}{2}}(x) = J_{k,0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n J_{k+n, 2n}(x)$$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{3}} J_{k, \frac{1}{2}}(x) = 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n J_{k+\frac{2n+1}{2}, 2n+1}(x)$$

Si on fait $\theta = 0$, $k = 0$ dans (B) on obtient dans le premier membre une forme indéterminée : sans difficulté, on montre que la vraie valeur est égale à 1, d'où le développement $J_{0,0} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{n, 2n}(x) = 1$ déjà connu.

Généralisons (B) et (C) et montrons par récurrence qu'il existe un développement de la forme

$$\begin{aligned} (B') \quad A_n \sqrt{\frac{x}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n)} \left[x \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta \right] = \\ = J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n)} (x) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\lambda_1+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu}^{(n)} (x) \times \cos 2 \mu \theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (C') \quad B_n \sqrt{\frac{x}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \frac{1}{2}}^{(n)} \left[x \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta \right] = \\ = 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\lambda_1+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu+1}^{(n)} (x) \times \sin (2\mu + 1) \theta \end{aligned}$$

où les A_n et les B_n sont des constantes qui seront déterminées plus loin.

Admettons en effet un tel développement pour la fonction hyperbessélienne d'ordre $n - 1$

$$\begin{aligned} A_{n-1} \sqrt{\frac{x}{n}} J_{\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n-1)} \left[x \sin^n \theta \right] = \\ = J_{\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n-1)} (x) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\lambda_2+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu}^{(n-1)} (x) \times \cos 2 \mu \theta \end{aligned}$$

Si on multiplie les deux membres de cette relation par

$$\left(\frac{x}{n} \right)^{n \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}} \quad \text{et qu'on remplace ensuite } x \text{ par } \frac{n}{\sqrt{p}}, \text{ on obtient}$$

$$\begin{aligned} \frac{A_{n-1}}{p^{\frac{n \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1} - \frac{1}{2}}{n}}} J_{\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n-1)} \left[\frac{n \sin^n \theta}{\sqrt{p}} \right] = \\ = \frac{1}{p^{\frac{n \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n}}} J_{\lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n-1)} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right) \\ + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} \frac{1}{p^{\frac{n \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n}}} J_{\lambda_2+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu}^{(n-1)} (x) \times \cos 2 \mu \theta \end{aligned}$$

L'original du second membre est

$$x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] + \\ 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n+1}} J_{\lambda_1 - \mu, \lambda_2 - \mu, \dots, \lambda_{n-1} - \mu, 2\mu}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \times \cos 2\mu\theta$$

Cherchons l'original du premier membre. L'original de

$$\frac{1}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n} + \frac{1}{2}}} J_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n-1)} \left[\frac{n}{\sqrt{p}} \right] \text{ serait } \\ x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right]$$

Si on y change p en $p \sin^2 \theta$, donc x en $x \sin^2 \theta$, on obtiendra l'original du premier membre qui est

$$A_{n-1} \sin^{[2(n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}) + 1] \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right) \theta} \times \\ \times x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x \sin^2 \theta} \right]$$

On en déduit la formule annoncée. Le coefficient A_n est obtenu par la formule de récurrence

$$A_n = A_{n-1} \sin^{[2(n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}) + 1] \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} \right)} \text{ avec } A_1 = \sqrt{\pi \sin \theta}$$

A partir de là, on obtient

$$A_n = \sqrt{\pi} (\sin \theta)^{\frac{2}{n-1} \left(\frac{1}{2} - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1} \right)}$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\sqrt{\frac{\pi x}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, -\frac{1}{2}}^{(n)}(x) = J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n)}(x) + \\ + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} (-1)^{\mu} J_{\lambda_1 + \mu, \lambda_2 + \mu, \dots, \lambda_{n-1} + \mu, 2\mu}^{(n)}(x)$$

Si on fait $\theta = 0$, le premier membre devient indéterminé : mais la vraie valeur se trouve aisément et on obtient

$$\frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\lambda_1+1) \dots \Gamma(\lambda_{n-1}+1)} \left(\frac{x}{n+1} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n-1}} =$$

$$= J_{\lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}, 0}^{(n)}(x) + 2 \sum_{\mu=1}^{\infty} J_{\lambda_1+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu}^{(n)}(x)$$

Le calcul est le même pour la formule (C'). On trouve

$$B_n = \sqrt{\pi} (\sin \theta)^{\frac{1}{n+1}} [n-2(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_{n-1})]$$

En particulier, si $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\sqrt{\frac{\pi x}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \frac{1}{2}}^{(n)}(x) = 2 \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{\mu} J_{\lambda_1+\mu, \lambda_2+\mu, \dots, \lambda_{n-1}+\mu, 2\mu+1}^{(n)}(x)$$

Troisième exemple. En utilisant toujours les mêmes relations symboliques, mais, par une méthode différente, on généralisera aux hyperbesséliennes la relation obtenue pour les fonctions de Bessel

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} \left(\frac{a^2}{2x} \right)^k J_{n-k}(x) = \left(1 - \frac{a^2}{x^2} \right)^n J_n \sqrt{x^2 - a^2}$$

Appliquons en effet à (1) la relation

$$e^{-ap} \varphi(p) \subset f(x-a) \text{ si } x > a \text{ où } \varphi(p) \subset f(x) \text{ si } x < a \text{ } f(x) = 0$$

On aura

$$x-a)^{\frac{n\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x-a} \right] \supset \frac{e^{-ap}}{p^{\frac{n\lambda_1-\lambda_2-\dots-\lambda_n}{n}}} J_{\lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right)$$

On développera e^{-ap} en série, soit $\sum (-1)^k \frac{a^k p^k}{k!}$ et on cherchera

l'original d'une somme de termes de la forme $\frac{1}{p^{\frac{n(\lambda_1-k)-\lambda_2-\dots-\lambda_n}{n}}} J_{\lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n-1)}$

qu'on obtient immédiatement. Après quelques simplifications

et la substitution de x et a par $\left(\frac{x}{n+1} \right)^{n+1}$ et $\left(\frac{a}{n+1} \right)^{n+1}$, on

obtiendra le développement

$$(D) \left[1 - \left(\frac{a}{x} \right)^{n+1} \right]^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[\sqrt{x^{n+1} - a^{n+1}} \right] = \\ = \sum_k \frac{(-1)^k}{k!} \left[\frac{a^{n+1}}{(n+1)x^n} \right]^k J_{\lambda_1 - k, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$$

2. — RELATIONS DE RÉCURRENCE

Elles sont nombreuses. Le calcul symbolique à n variables permet de les établir, quels que soient les nombres λ_i , entiers ou non, positifs ou non.

I. Relations de récurrence entre les fonctions $J^{(n)}$

a) Relations où les dérivées ne figurent pas. — On les obtiendra grâce à la relation symbolique

$$x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n} f(x_1 x_2 \dots x_n) \supset_n (-1)^{\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n} p_1 p_2 \dots p_n \frac{\partial^{\alpha_1 + \dots + \alpha_n}}{\partial p_1^{\alpha_1} \partial p_2^{\alpha_2} \dots \partial p_n^{\alpha_n}} \left[\frac{\varphi(p_1 p_2 \dots p_n)}{p_1 p_2 \dots p_n} \right]$$

Prenons d'abord le cas le plus simple, c'est-à-dire

$$x_1 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset - p_1 \frac{\partial}{\partial p_1} \left[\frac{\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)}{p_1} \right]$$

que nous appliquerons à (6)

Le second membre de l'égalité symbolique vaudra

$$\left[\frac{\lambda_1 + 1}{p_1^{\lambda_1 + 1} p_2^{\lambda_2} \dots p_n^{\lambda_n}} - \frac{1}{p_1^{\lambda_1 + 2} p_2^{\lambda_2 + 1} \dots p_n^{\lambda_n + 1}} \right] e^{\frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_n}}$$

On en peut trouver facilement l'original et, après quelques simplifications et le changement par x de $\sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n} \times (n+1)$, on obtiendra la formule de récurrence

$$(8) \frac{x}{n+1} \left[J_{\lambda_1 - 1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + J_{\lambda_1 + 1, \lambda_2 + 1, \dots, \lambda_n + 1}^{(n)}(x) \right] = \lambda_1 J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$$

En additionnant toutes les relations analogues, on obtiendra

$$(9) \frac{x}{n+1} \left[J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + J_{\lambda_1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + \dots + J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}-1}^{(n)}(x) + \right. \\ \left. + n J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}^{(n)}(x) \right] = (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$$

Si on retranche deux formules (8) correspondant à deux valeurs λ_i et λ_j , on aura

$$(10) (\lambda_i - \lambda_j) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) = \frac{x}{n+1} \left[J_{\lambda_i-1, \lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) - J_{\lambda_j-1, \lambda_1, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) \right]$$

Bien des formules analogues peuvent être obtenues quand $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$, sont quelconques. Elles se compliquent très vite. Si on applique la relation

$$x_1 x_2 f(x_1, x_2, \dots, x_n) \supset_n p_1 p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} \left[\frac{\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)}{p_1 p_2} \right]$$

on trouvera

$$\frac{x^2}{(n+1)^2} \left[J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) - J_{\lambda_1+3, \lambda_2+3, \lambda_3+2, \dots, \lambda_n+2}^{(n)}(x) \right] + \\ + (\lambda_1 + \lambda_2 + 3) \frac{x}{n+1} J_{\lambda_1+2, \lambda_2+2, \lambda_3+1, \dots, \lambda_n+1}^{(n)}(x) = \\ = (\lambda_1 + 1) (\lambda_2 + 1) J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)$$

Pour $n = 2$, on retrouve évidemment les relations de récurrence établies par Monsieur Humbert pour les $J_{m,n}$.

b) Relations où figure la dérivée première

En appliquant à (6) la relation $x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} \supset_n p_1 \frac{\partial \varphi}{\partial p_1}$, nous tirerons

$$(11) (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} = x J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} + x J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}^{(n)}$$

et en tenant compte de (9)

$$(12) \quad J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = \\ = \frac{1}{n+1} [J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + J_{\lambda_1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} + J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n-1} - J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}]$$

Si on élimine $J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}$ entre (8) et (11), on trouve

$$(13) \quad (n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + x J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = x J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

Cette formule (13) aurait pu être obtenue à partir de la relation $\frac{\partial f}{\partial x_1} \supset p_1 \varphi$. Mais, ceci nécessite $\lambda_1 > 0$. La méthode employée n'exige pas cette hypothèse.

On déduira aussi

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}}{x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}} \right] = - \frac{J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}}{x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}} \quad \frac{d}{dx} [x^{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}] = \\ = x^{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

ou encore

$$J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x) = \frac{1}{x^{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}} \int x^{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x) dx \quad (14)$$

et une formule analogue. C'est une autre façon d'écrire les formules (11) et (13).

D'autres formules ne contenant que la dérivée première pourraient être obtenues, par exemple, à partir de

$$x_1^2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \supset p_1 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial p_1^2} \quad \text{ou} \quad x_1 x_2 \frac{\partial f}{\partial x_1} \supset p_1 p_2 \frac{\partial^2}{\partial p_1 \partial p_2} \left[\frac{\varphi(p_1, p_2, \dots, p_n)}{p_2} \right]$$

Elles sont plus compliquées que les précédentes.

c) *Relations où figurent les dérivées d'ordre supérieur.*

Appelons A_1, A_2, \dots, A_n , les quantités $n\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n$, $n\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n$, $n\lambda_n - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_{n-1}$. La relation (13) donne, par dérivation

$$(a) \quad J''_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J'_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} - \frac{A_1}{x} J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{A_1}{x^2} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

Mais d'autre part

$$J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} - \frac{A_2}{x} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

Si on remplace λ_1 par $\lambda_1 - 1$ dans cette dernière formule A_2 augmente de 1. Donc

$$J'_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} - \frac{(A_2 + 1)}{x} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

donc

$$(b) \quad J'_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} - \frac{(A_2+1)}{x} \left[\frac{J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}}{x} + \frac{A_1}{x} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} \right]$$

En éliminant $J'_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ entre (a) et (b), on aura la relation

$$(15) \quad J''_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{A_1 + A_2 + 1}{x} J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{A_1 A_2}{x^2} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$$

On pourra généraliser le procédé. Si on dérive (15), le calcul fera intervenir la dérivée $J'_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$ qu'on calculera toujours à l'aide d'une des formules (13)

$$J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3-1, \dots, \lambda_n} - \frac{A_3}{x} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$$

ou

$$J'_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \dots, \lambda_n} - \frac{(A_3+2)}{x} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$$

$J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$ est connu par (15). On obtiendra ainsi.

$$(16) \quad J'''_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{\Sigma A_1 + 3}{x} J''_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{\Sigma A_1 A_2 + \Sigma A_1 + 1}{x^2} J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \frac{A_1 A_2 A_3}{x^3} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \lambda_4, \dots, \lambda_n}$$

et ensuite

$$(17) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(IV)} + \frac{\Sigma A_1 + 6}{x} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}''' + \frac{\Sigma A_1 A_2 + 3 \Sigma A_1 + 7}{x_2} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}'' + \\ + \frac{(\Sigma A_1 A_2 A_3 + \Sigma A_1 A_2 + \Sigma A_1 + 4)}{x^3} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}' + \\ + \frac{A_1 A_2 A_3 A_4}{x^4} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \lambda_4-1, \lambda_5, \dots, \lambda_n}$$

Dans (16), les sommes Σ sont relatives aux trois nombres A_1, A_2, A_3 ; dans (17) aux quatre nombres A_1, A_2, A_3, A_4 . On aperçoit facilement la forme de la relation plus générale faisant intervenir la dérivée d'ordre k de la fonction $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ mais les coefficients qui figurent devant les termes de la forme Σ seront déterminés plus loin.

Les relations (15), (16), (17) et les relations analogues vont nous permettre de calculer $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ en fonction de $J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$ (Equation 15) ou de $J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \dots, \lambda_n}$ (Equation 16) ou de $J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \lambda_4-1, \lambda_5, \dots, \lambda_n}$ (Equation 17). En effet, (15) par exemple montre que $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ satisfait à l'équation différentielle

$$x^2 y'' + (A_1 + A_2 + 1) x y' + A_1 A_2 y = x^2 J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}$$

l'équation homogène correspondante étant une équation d'Euler : l'équation déterminante qui lui correspond est, si on pose, $y = x^r$

$$r^2 + (A_1 + A_2) r + A_1 A_2 = 0$$

dont les racines sont $-A_1$ et $-A_2$. La méthode de variation des constantes arbitraires nous donnera l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$y = \frac{x^{-A_1}}{A_2 - A_1} \left[\int x^{1+A_1} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} (x) dx + K_1 \right] + \\ + \frac{x^{-A_2}}{A_1 - A_2} \left[\int x^{1+A_2} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n} (x) dx + K_2 \right]$$

Pour retrouver la solution particulière $y = J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} (x)$, il faudra annuler les constantes K_1 et K_2 . En effet $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ donne un développement en série qui procède suivant les puissances de

$x^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + \mu(n+1)}$ et il en est de même des termes de la forme

$$x^{-A_1} \int x^{1+A_1} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3, \dots, \lambda_n}(x) dx$$

Employons la même méthode à partir des équations (16) ou (17) : on trouve que les équations déterminantes correspondant aux équations d'Euler qu'on forme de façon analogue sont

$$\begin{aligned} r^3 + r^2 \Sigma A_1 + r \Sigma A_1 A_2 + A_1 A_2 A_3 &= 0 \\ \text{ou } 0 = r^4 + r^3 \Sigma A_1 + r^2 \Sigma A_1 A_2 + r \Sigma A_1 A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3 A_4 \end{aligned}$$

Les racines sont $-A_1, -A_2, -A_3$ pour la première, $-A_1, -A_2, -A_3, -A_4$ pour la seconde. En employant à nouveau la méthode de variation des constantes arbitraires, on obtiendra, à partir de (16) par exemple

$$J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x) = \Sigma \frac{x^{-A_1}}{(n+1)^2 (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_1)} \int x^{2+A_1} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \lambda_3-1, \lambda_4, \dots, \lambda_n}(x) dx$$

le signe Σ indiquant qu'on a 3 termes de la forme précédente où on permute $A_1, A_2, A_3, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

On pense donc de façon plus générale à une relation de la forme

$$(18) \quad J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} = \Sigma \frac{x^{-A_1}}{(n+1)^{k-1} \pi(\lambda_j - \lambda_1)} \int x^{k-1+A_1} J_{\lambda_1-1, \dots, \lambda_k-1, \lambda_{k+1}, \dots, \lambda_n}(x) dx$$

Dans $\pi(\lambda_j - \lambda_1)$, j prend toutes les valeurs entières 2, 3, ... k et on fait ensuite la somme de k termes de la forme écrite. On vérifiera cette formule par calcul direct.

3. — AUTRE CONCLUSION TIRÉE DES IMAGES EN CALCUL SYMBOLIQUE : FORMULES DE DÉRIVATION PAR RAPPORT AUX INDICES

① La formule de dérivation par rapport à l'indice n de $J_n(x)$ a été donnée par Monsieur Van der Pol. Elle a été généralisée par Monsieur Humbert pour les fonctions $J_{m,n}$. Leur méthode peut être étendue à une fonction hyperbessélienne d'ordre quelconque et permettra d'obtenir la dérivée de $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$ par rapport à un des indices.

Dérivons par rapport à λ_1 la relation symbolique

$$x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \supset \frac{1}{p \frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}} J_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right)$$

on obtient

$$\begin{aligned} \frac{n}{n+1} x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \times \log x \\ + x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} \frac{\partial}{\partial \lambda_1} \left[J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} (n+1) \sqrt{x} \right] \\ \supset \frac{-\log p}{p^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n}}} J_{\lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n}^{(n-1)} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right) \end{aligned}$$

En appliquant le théorème du produit on trouve l'original du second membre qui est

$$\begin{aligned} \int_0^x [\log(x-y) + \gamma] y^{\frac{n(\lambda_1-1) - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{y} \right] dy \\ = (\log x + \gamma) \int_0^x y^{\frac{n(\lambda_1-1) - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{y} \right] dy + \\ + \int_0^x \log \left(1 - \frac{y}{x} \right) \times \dots dy \end{aligned}$$

Mais, d'après les formules de récurrence

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left[x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} (n+1) \sqrt{x} \right] = \\ = x^{\frac{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n}{n+1}} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x} \right] \end{aligned}$$

On en tire la dérivée cherchée et si, dans la formule trouvée, on change $(n+1) \sqrt{x}$ et $(n+1) \sqrt{y}$ en x et y , on obtient finalement

$$\begin{aligned} (20) \quad \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x)] = \left(\gamma + \log \frac{x}{n+1} \right) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} + \\ + \int_0^x \log \left[1 - \left(\frac{y}{x} \right)^{n+1} \right] \left(\frac{y}{x} \right)^{n\lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n} J_{\lambda_1-1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(y) dy \end{aligned}$$

Comme l'image symbolique est de même type pour les fonctions $I^{(n)}$, $J^{(n)}$, $\text{ber}^{(n)}$, $\text{bei}^{(n)}$, la formule de récurrence employée dans la démonstration précédente étant toujours la même, (20) est valable pour ces fonctions.

② Supposons les λ_i tous égaux à m et dérivons par rapport à m la relation

$$\begin{aligned} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}} J_{m, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}] \supset \frac{1}{n} \frac{1}{(\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n)^m} e^{\frac{-1}{\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n}} \\ \frac{1}{n+1} (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}} \log (x_1 x_2 \dots x_n) J_{m, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}] + \\ + (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}} \frac{\partial}{\partial m} [J_{m, m, \dots, m}^{(n)}] \supset \frac{-\log \dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n}{(\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n)^m} e^{\frac{-1}{\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n}} \end{aligned}$$

Mais, l'original du second membre est

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} [\log (x_1 - u_1) (x_2 - u_2) \dots (x_n - u_n) + n \gamma] \\ (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt{u_1 u_2 \dots u_n}] du_1 du_2 \dots du_n \\ = (\log x_1 x_2 \dots x_n + n \gamma) \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} \\ J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt{u_1 u_2 \dots u_n}] du_1 du_2 \dots du_n \\ + \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \left[\log \left(1 - \frac{u_1}{x_1} \right) \left(1 - \frac{u_2}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{u_n}{x_n} \right) \right] (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} \\ J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt{u_1 u_2 \dots u_n}] du_1 du_2 \dots du_n \end{aligned}$$

La première intégrale multiple qui figure dans le second membre de la relation qui vient d'être écrite se transforme aisément puisqu'on a

$$\begin{aligned} \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt{u_1 u_2 \dots u_n}] du_1 du_2 \dots du_n \\ \supset \frac{1}{n} \frac{1}{(\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n)^m} e^{\frac{-1}{\dot{p}_1 \dot{p}_2 \dots \dot{p}_n}} \subset (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}} J_{m, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}] \end{aligned}$$

On aurait donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} [J_{m, m, \dots, m}^{(n)} (n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}] = \\ = \left(n\gamma + \frac{n}{n+1} \log x_1 x_2 \dots x_n \right) J_{m, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}] + \end{aligned}$$

$$+ \int_0^{x_1} \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} \left[\log \left(1 - \frac{u_1}{x_1} \right) \left(1 - \frac{u_2}{x_2} \right) \dots \left(1 - \frac{u_n}{x_n} \right) \right] \left(\frac{u_1 u_2 \dots u_n}{x_1 x_2 \dots x_n} \right)^{\frac{m}{n+1}} \\ (u_1 u_2 \dots u_n)^{-\frac{1}{n+1}} J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{u_1 u_2 \dots u_n}] \times du_1 du_2 \dots du_n$$

Dans cette relation subsiste une intégrale multiple : elle peut se transformer en une intégrale simple où n'interviendra que le produit $x_1 x_2 \dots x_n$. En effet le calcul de cette intégrale se ramène au calcul de n intégrales de la forme

$$\frac{1}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}}} \int_0^{x_1} \log \left(1 - \frac{u_1}{x_1} \right) du_1 \int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} \\ J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{u_1 u_2 \dots u_n}] du_2 du_3 \dots du_n \\ \text{Or } (x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m-1}{n+1}} J_{m-1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n}] \\ \supset \frac{1}{(p_1 p_2 \dots p_n)^{m-1}} e^{\frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_n}}$$

Donc l'intégrale

$$\int_0^{x_2} \dots \int_0^{x_n} (u_1 u_2 \dots u_n)^{\frac{m-1}{n+1}} J_{m+1, \dots, m-1}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{u_1 u_2 \dots u_n}] du_2 \dots du_n$$

a pour image

$$\frac{1}{p_1^{m-1} (p_2 \dots p_n)^m} e^{\frac{-1}{p_1 p_2 \dots p_n}} \text{ et vaut donc}$$

$$x_1^{\frac{m-n}{n+1}} (x_2 \dots x_n)^{\frac{m+1}{n+1}} J_{m-1, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{x_1 x_2 \dots x_n}]$$

On aura donc à calculer n intégrales de la forme

$$\frac{1}{(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{m}{n+1}}} \int_0^{x_1} \log \left(1 - \frac{u_1}{x_1} \right) u_1^{\frac{m-n}{n+1}} (x_2 x_3 \dots x_n)^{\frac{m+1}{n+1}} \\ J_{m-1, m, \dots, m}^{(n)} [(n+1) \sqrt[n+1]{u_1 x_2 \dots x_n}] du_1$$

En posant $\frac{u_1}{x_1} = t^{n+1}$, on verra que ces n intégrales sont égales à

$$(n+1)(x_1 x_2 \dots x_n)^{\frac{1}{n+1}} \int_0^1 \log(1-t^{n+1}) t^m J_{m-1, m, \dots, m}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n t} \right] dt$$

Finalement, après le changement de $(n+1) \sqrt{x_1 x_2 \dots x_n}$ en x , on pourra écrire

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial m} [J_{m, m, \dots, m}^{(n)}(x)] &= \left(n\gamma + n \log \frac{x}{n+1} \right) J_{m, m, \dots, m}^{(n)}(x) + \\ &+ nx \int_0^1 [\log(1-t^{n+1})] t^m J_{m-1, m, \dots, m}^{(n)}(tx) dt \end{aligned}$$

Un résultat analogue pourrait être obtenu si k seulement des indices étaient égaux à m .

FONCTIONS HYPERBESSELIENNES ET SINUS D'ORDRE SUPÉRIEUR

On connaît les relations classiques $J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x$, $J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x$. Monsieur Humbert a exprimé en fonction des sinus du 3^e ordre les fonctions $J_{\frac{2}{3}, \frac{1}{3}}(x)$, $J_{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}}(x)$, $J_{-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}}(x)$. Nous allons montrer que pour des valeurs particulières des indices qui seront précisées, les fonctions $J^{(n)}$, $I^{(n)}$, $\text{ber}^{(n)}$, $\text{bei}^{(n)}$ s'expriment à l'aide des sinus d'ordre $n+1$. Nous utiliserons les notations de Monsieur Poli et nous noterons $f_1^{(n)}$, $f_2^{(n)}$... les premier, second ... sinus d'ordre n d'images $\frac{p}{p^n+1}$, $\frac{p^2}{p^n+1}$, ... et $h_1^{(n)}$, $h_2^{(n)}$... les premier, second... sinus hyperboliques d'ordre n , d'images $\frac{p}{p^n-1}$, $\frac{p^2}{p^n-1}$, ...

Cas des fonctions $J^{(n)}$. Cherchons l'image de

$$x^{\frac{n}{2}} J_{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1}}^{(n)}(x)$$

Par définition, cette fonction est égale à

$$\frac{x^{n-k}}{(n+1)^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} \left(\frac{x}{n+1}\right)^{(n+1)\mu}}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1} + 1 + \mu\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-k}{n+1} + 1 + \mu\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n+1} + \mu\right) \dots \Gamma\left(1 - \frac{1}{n+1} + \mu\right) \mu!}$$

dont l'image est

$$\frac{1}{(n+1)^{\frac{n-k}{2}}} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\mu} [(n+1)\mu + n - k]!}{\Gamma\left(\frac{1}{n+1} + 1 + \mu\right) \dots \Gamma\left(\frac{n-k}{n+1} + 1 + \mu\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n+1} + \mu\right) \dots \Gamma\left(1 - \frac{1}{n+1} + \mu\right) (n+1)^{(n+1)\mu} \mu!} \times \frac{1}{p^{(n+1)\mu + n - k}}$$

Mais, en utilisant les propriétés des fonctions Γ , on peut montrer que le dénominateur égale

$$\frac{[(n+1)\mu + n - k]!}{(n+1)^{n-k}} \Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right) \frac{1}{p^{(n+1)\mu + n - k}} \cdot \frac{1}{\mu!}$$

ou puisque $\Gamma\left(\frac{1}{n+1}\right) \Gamma\left(\frac{2}{n+1}\right) \dots \Gamma\left(\frac{n}{n+1}\right) = \frac{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}{\sqrt{n}}$

l'image cherchée est donc

$$\frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{p^{k+1}}{p^{n+1} + 1}$$

D'où la relation

$$x^{\frac{n}{2}} J_{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1}}^{(n)}(x) = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} f_{k+1}^{(n+1)}(x)$$

k prenant toutes les valeurs $0, 1, 2, \dots, n$.

Cas des fonctions $I^{(n)}$. On aurait par un calcul tout semblable

$$x^{\frac{n}{2}} I_{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1}}^{(n)}(x) = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} h_{k+1}^{(n+1)}(x)$$

le seul changement étant la substitution des sinus hyperboliques aux sinus $f_{k+1}^{(n+1)}$

Cas des fonctions $ber^{(n)}$ et $bei^{(n)}$. Puisque par définition, on a posé

$$i^{\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n}{n+1}} [\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + i \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)] = I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[x i^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

Pour les valeurs particulières des indices $\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-1}{n+1}$ la somme $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = \frac{n-2k}{2}$

et on a donc

$$i^{\frac{n-2k}{2(n+1)}} [\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + i \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)] = I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[x i^{\frac{1}{n+1}} \right]$$

Or, si dans l'image $x^{\frac{n}{2}} I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) \supset \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \frac{p^{k+1}}{p^{n+1} - 1}$ (pour

les valeurs précédentes des indices) on change x en $xi^{\frac{1}{n+1}}$, donc p en $pi^{\frac{-1}{n+1}}$, on a

$$x^{\frac{n}{2}} i^{\frac{n}{2(n+1)}} I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left[x i^{\frac{1}{n+1}} \right] \supset \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} p^{k+1} i^{\frac{n-k}{n+1}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} p - i^{n+1}}$$

D'où

$$x^{\frac{n}{2}} [\text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) + i \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x)] \supset \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} p^{k+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} p^{n+1} - i}$$

$$\text{On en déduit } x^{\frac{n}{2}} \text{ber}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) \supset \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} p^{n+k+2}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} p^{2(n+1)} + 1}$$

$$x^{\frac{n}{2}} \text{bei}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(x) \supset \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}} p^{k+1}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} p^{2(n+1)} + 1}$$

et donc, pour ces valeurs particulières des indices, $x^{\frac{n}{2}} \text{ber}^{(n)}$ et $x^{\frac{n}{2}} \text{bei}^{(n)}$ s'expriment à l'aide de sinus d'ordre $2n+1$

$$x^{\frac{n}{2}} \text{ber}^{(n)} \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1} (x) = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} j_{k+n-2}^{(2n-2)}(x)$$

$$x^{\frac{n}{2}} \text{bei}^{(n)} \frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1} (x) = \frac{(n+1)^{\frac{n+1}{2}}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} j_{k+1}^{(2n+1)}(x)$$

Mais, les images obtenues peuvent être comparées à celles que nous avons établies pour $x^{\frac{n}{2}} J^{(n)}$. On en déduit que pour ces valeurs des indices, les fonctions $\text{ber}^{(n)}$ et $\text{bei}^{(n)}$ sont des fonctions $x^{\frac{n+1}{2}} J^{(2n+1)}$.

En effet

$$x^{\frac{2n+1}{2}} J_{\frac{1}{2n+2}, \frac{2}{2n+2}, \dots, \frac{2n+1-k}{2n+2}, \frac{-k}{2n+2}, \dots, \frac{-2}{2n+2}, \frac{-1}{2n+2}}^{(2n+1)}(x) = \frac{(2n+2)^{n+1}}{(2\pi)^{\frac{2n+1}{2}}} f_{\frac{k+1}{2}}^{(2n+2)}(x)$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \text{bei}^{(n)}_{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1}}(x) &= \left(\frac{\pi}{2n+2} \right)^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{1}{2n+2}, \frac{2}{2n+2}, \dots, \frac{2n+1-k}{2n+2}, \frac{-k}{2n+2}, \dots, \frac{-2}{2n+2}, \frac{-1}{2n+2}}^{(2n+1)}(x) \\ \text{ber}^{(n)}_{\frac{1}{n+1}, \frac{2}{n+1}, \dots, \frac{n-k}{n+1}, \frac{-k}{n+1}, \dots, \frac{-2}{n+1}, \frac{-1}{n+1}}(x) &= \left(\frac{\pi}{2n+2} \right)^{\frac{n+1}{2}} x^{\frac{n+1}{2}} \times \\ &\times J_{\frac{1}{2n+2}, \frac{2}{2n+2}, \dots, \frac{n-k}{2n+2}, \frac{-(k+n+1)}{2n+2}, \dots, \frac{-2}{2n+2}, \frac{-1}{2n+2}}^{(2n+1)}(x) \end{aligned}$$

Application. Représentation intégrale des fonctions hyperbesséliennes

On connaît l'expression donnée par Poisson pour les fonctions de Bessel

$$J_n(z) = \frac{1}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^\pi \cos(z \cos \theta) \sin^{2n} \theta d\theta$$

qu'on peut encore écrire sous la forme (en posant $\cos \theta = \xi$)

$$J_n(z) = \frac{2}{\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \left(\frac{z}{2}\right)^n \int_0^1 (1 - \xi^2)^{n-\frac{1}{2}} \cos(\xi z) d\xi$$

C'est cette expression que nous allons généraliser aux fonctions hyperbesséliennes : $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}$ s'exprimera au moyen d'une intégrale multiple, mais au lieu d'un cosinus ordinaire derrière le signe \int interviendra un sinus d'ordre supérieur. Nous traiterons d'abord le cas des fonctions hyperbesséliennes d'ordre 2, c'est-à-dire des fonctions $J_{m, m}$, puis le cas général pour lequel les expressions sont plus compliquées.

Ecrivons la relation symbolique $x^{\frac{2m-n}{3}} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \gg \frac{1}{p^m q^n} e^{-\frac{1}{pq}}$
 sous la forme

$$x^{\frac{2m-n}{3}} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) \gg \frac{1}{p^{m-m'}} q^{n-n'} \frac{1}{pq} \frac{1}{p^{m'-1} q^{n'-1}} e^{-\frac{1}{pq}}$$

et appliquons la formule du produit

$$x^{\frac{2m-n}{3}} y^{\frac{2n-m}{3}} J_{m,n}(3\sqrt[3]{xy}) = \int_0^x \int_0^y \frac{(x-u)^{m-m'} (y-v)^{n-n'}}{\Gamma(m-m'+1) \Gamma(n-n'+1)} u^{\frac{2m'-n'-1}{3}} v^{\frac{2n'-m'-1}{3}} J_{m'-1, n'-1}(3\sqrt[3]{uv}) du dv$$

ou, en changeant x, y, u, v respectivement en x^3, y^3, u^3, v^3

$$x^{2m-n} y^{2n-m} J_{m,n}(3xy) =$$

$$\int_0^x \int_0^y (x^3-u^3)^{m-m'} (y^3-v^3)^{n-n'} u^{2m'-n'-1} v^{2n'-m'-1} \times$$

$$9u^2 v^2 \times J_{m'-1, n'-1}(3uv) du dv$$

Or, avec les notations employées plus haut, on a pour les sinus du 3^e ordre

$$x J_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} f_1(x) \quad x J_{\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} f_2(x)$$

$$x J_{-\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} f_3(x)$$

En faisant successivement dans la dernière intégrale écrite

$$m' = \frac{5}{3} \quad n' = \frac{4}{3} \quad \text{ou} \quad m' = \frac{4}{3} \quad n' = \frac{2}{3} \quad \text{ou} \quad m' = \frac{1}{3} \quad n' = \frac{2}{3},$$

on fera intervenir les sinus du 3^e ordre.

Avec le 3^e sinus par exemple, on aura

$$x^{2m-n} y^{2n-m} J_{m,n}(3xy) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^x \int_0^y \frac{(x^3-u^3)^{m-\frac{1}{3}} (y^3-v^3)^{n-\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} v f_3(3uv) du dv$$

et si on pose $u = x\xi \quad v = y\eta$

$$x^{2m-n} y^{2n-m} J_{m,n}(3xy) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \int_0^1 \int_0^1 \frac{x^{3m} y^{3n} (1-\xi^3)^{m-\frac{1}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{2}{3}}}{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} \eta f_3(3xy\xi\eta) d\xi d\eta$$

et finalement, après avoir posé $3xy = z$

$$(z) =$$

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\pi \Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{z}{3}\right)^{m-n} \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{1}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{2}{3}} \eta f_3(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

$$\text{valable si } m > -\frac{2}{3} \quad n > -\frac{1}{3}$$

ou, ce qui revient au même, nous exprimons la fonction hypergéométrique ${}_0F_2(m+1, n+1, z)$ par l'intégrale double

$$\frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \frac{\Gamma(m+1) \Gamma(n+1)}{\Gamma\left(m+\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{1}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{2}{3}} \eta f_3(-3\xi\eta\sqrt{z}) d\xi d\eta$$

Si en particulier, nous faisons $m = \frac{1}{3} \quad n = \frac{2}{3}$, nous obtiendrons

$$f_1(z) = z^2 \int_0^1 \int_0^1 \eta f_3(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

Avec le premier et le second sinus, on obtient de même

$$_0(z) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2\pi \Gamma\left(m-\frac{1}{3}\right) \Gamma\left(n+\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{z}{3}\right)^{m+n-1} \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{4}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{2}{3}} \xi^2 f_2(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

$$_1(z) =$$

$$= \frac{9\sqrt{3}}{2\pi \Gamma\left(m-\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(n-\frac{1}{3}\right)} \left(\frac{z}{3}\right)^{m+n-2} \int_0^1 \int_0^1 (1-\xi^3)^{m-\frac{5}{3}} (1-\eta^3)^{n-\frac{4}{3}} \xi^2 \eta f_1(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

En particulier, si on fait $m = \frac{4}{3}$ $n = \frac{2}{3}$ dans la première de ces expressions, on obtient

$$J_{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \frac{z}{3} \int_0^1 \int_0^1 f_2(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

$m = \frac{5}{3}$ $n = \frac{4}{3}$ dans la seconde des expressions donnera

$$J_{\frac{5}{3}, \frac{4}{3}}(z) = \frac{9\sqrt{3}}{2\pi} \frac{z}{3} \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 \eta f_1(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

Or, d'après les formules de récurrence

$$\frac{d}{dx} \left[J_{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}} \right] = -J_{\frac{4}{3}, \frac{2}{3}} = \frac{d}{dx} \left[\frac{f_2(x)}{x} \right] \times \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \left[\frac{f_3}{x} - \frac{f_2}{x^2} \right]$$

$$f_2(z) - z f_3(z) = z^3 \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 f_2(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

$$\text{De même de } J_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}} = \frac{3\sqrt{3}}{2\pi} \frac{f_1}{x} \text{ et } \frac{d}{dx} \left[\frac{J_{\frac{1}{3}, \frac{2}{3}}}{x} \right] = - \frac{J_{\frac{4}{3}, \frac{5}{3}}}{x},$$

on tire

$$2 f_1(z) - z f_2(z) = z^3 \int_0^1 \int_0^1 \xi^2 \eta f_1(\xi\eta z) d\xi d\eta$$

On peut obtenir des formules analogues pour les fonctions hyperbesséliennes d'ordre n . Nous partirons de la formule (5), l'image ayant été écrite sous la forme

$$\frac{1}{p_1 p_2 \dots p_n} p_1^{\mu_1 - \lambda_1} \dots p_n^{\mu_n - \lambda_n} \frac{1}{p_1^{\mu_1 - 1} \dots p_n^{\mu_n - 1}} \frac{-1}{e^{p_1 p_2 \dots p_n}}$$

D'où, en appliquant la formule du produit et après quelques calculs analogues à ceux fait pour la fonction $J_{m,n}$, on trouvera

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n (x) =$$

$$\frac{(n+1)^{n+2}}{(2\pi)^2} \left(\frac{x}{n+1} \right)^{\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n + k - n} \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \prod_{i=1}^{n-k} \left[\frac{(1 - \xi_i^{n+1})^{\lambda_i - 1 - \frac{i}{n+1}} \times \xi_i^{k+i}}{\Gamma\left(\lambda_i - \frac{i}{n+1}\right)} \right] \times$$

$$\prod_{i=n-k+1}^n \left[\frac{(1 - \xi_i^{n+1})^{\lambda_i - \frac{i}{n+1}} \times \xi_i^{k-1+i-n}}{\Gamma\left(\lambda_i - \frac{i}{n+1} + 1\right)} \right] f_{k+1}^{(n+1)}(x \xi_1 \xi_2 \dots \xi_n) d\xi_1 d\xi_2 \dots d\xi_n$$

CHAPITRE IV

FONCTIONS HYPERBESSELIENNES

ET FORMULES OPERATOIRES DE CALCUL SYMBOLIQUE

Le calcul symbolique à une ou n variables nous a fait connaître un certain nombre de propriétés de fonctions hyperbesséliennes. Inversement, ces fonctions nous donneront des formules opératoires de calcul symbolique permettant de déterminer certains originaux ou certaines images. Nous ne parlerons que d'un type de formules : celles qui nous donnent des originaux à partir de $\varphi(p)$

1. Soit $f(x) \supset (p)$. Cherchons les originaux de

$$\varphi\left(\frac{1}{p^n}\right), p^n \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right), p^{n(1-k)} \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right)$$

n entier, k nombre positif quelconque. Les formules connues

$$\left(\frac{1}{p}\right) \subset \int_0^\infty \left(\frac{x}{s}\right)^{\frac{1}{2}} J_1(2\sqrt{sx}) f(s) ds \quad \varphi\left(\frac{1}{p^2}\right) \subset \frac{x\sqrt{\pi}}{2} \int_0^\infty J_{1, \frac{1}{2}}\left(3\sqrt{\frac{x^2 s}{4}}\right) \frac{f(s) ds}{\sqrt{s}}$$

font intervenir les fonctions de Bessel ordinaires ou les fonctions hyperbesséliennes d'ordre 2. Il est naturel d'essayer de les généraliser à l'aide des fonctions hyperbesséliennes d'ordre n . Établissons pour cela la relation

$$(R) \quad \frac{1}{p^{kn}} e^{-\frac{s}{p^n}} \subset \frac{x^{kn}}{\Gamma(kn+1)} {}_0F_n \left(k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}, \dots, k + \frac{n-1}{n}, k+1; -s \frac{x^n}{n^n} \right)$$

En effet, le premier membre qui peut s'écrire $\frac{1}{p^{kn}} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} s^{\lambda}}{p^{n\lambda} \lambda!}$ a pour original $\sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} s^{\lambda} x^{\pi(k+\lambda)}}{\lambda! \Gamma[1+n(k+\lambda)]}$. D'autre part, le second membre est égal à

$$\frac{x^{kn}}{\Gamma(kn+1)} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} s^{\lambda} \binom{x}{n}^{n\lambda} \Gamma\left(k + \frac{1}{n}\right) \Gamma\left(k + \frac{2}{n}\right) \dots \Gamma\left(k + \frac{n-1}{n}\right) \Gamma(k+1)}{\Gamma\left(k + \frac{1}{n} + \lambda\right) \Gamma\left(k + \frac{2}{n} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(k + \frac{n-1}{n} + \lambda\right) \Gamma(k+1+\lambda)^{\lambda}}$$

Si on tient compte de la relation connue

$$\Gamma(k) \Gamma\left(k + \frac{1}{n}\right) \dots \Gamma\left(k + \frac{n-1}{n}\right) = n^{\frac{1}{2}-kn} (2\pi)^{\frac{n-1}{2}} \Gamma(kn)$$

on justifie (R) en montrant l'identité des développements des deux membres de la relation.

Multiplions alors les deux membres de (R) par $f(s) ds$ et intégrons, 0 et ∞ étant les limites d'intégration

$$\text{Puisque } p^{n(1-k)} \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right) = \frac{1}{p^{kn}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{p^n}} f(s) ds, \text{ on en déduit}$$

$$p^{n(1-k)} \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right) \subset \frac{x^{kn}}{\Gamma(kn+1)} \int_0^{\infty} {}_0F_n \left(k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}, \dots, k + \frac{n-1}{n}, k+1, -s \frac{x^n}{n^n} \right) f(s) ds$$

On peut transformer cette formule en faisant intervenir la fonction hyperbessélienne d'ordre n , d'indices $k, k - \frac{1}{n}, k - \frac{2}{n} \dots k - \left(\frac{n-1}{n}\right)$

et d'argument $(n+1) \sqrt[n]{s \frac{x^n}{n^n}}$

Cette fonction est en effet égale à

$$\left[\frac{2nk-(n-1)}{n+1} \right] \times \frac{1}{\Gamma\left(k+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(k+\frac{2}{n}\right)\dots\Gamma(k+1)} {}_0F_n\left(k+\frac{1}{n}, k+\frac{2}{n}, \dots, k+1; -\frac{sx^n}{n^n}\right)$$

et on pourra écrire la relation symbolique

$$\left[\frac{2nk-(n-1)}{n+1} \right] \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right) C \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}} x^{\frac{n(n-1)+2kn}{2(n+1)}}}{n^{\frac{n^2+1+2kn}{2(n+1)}}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1-2nk}{2(n+1)}} J_{k, k-\frac{1}{n}, \dots, k-\frac{(n-1)}{n}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{\frac{sx^n}{n^n}} \right] f(s) ds$$

En particulier si $k = 0$ ou $k = 1$, on obtient

$$\left[\frac{2nk-(n-1)}{n+1} \right] \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right) C \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n(n-1)}{2(n+1)}} \int_0^\infty s^{\frac{n-1}{2(n+1)}} J_{0, -\frac{1}{n}, -\frac{2}{n}, \dots, -\frac{(n-1)}{n}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{\frac{sx^n}{n^n}} \right] f(s) ds$$

$$\left[\frac{2nk-(n-1)}{n+1} \right] \varphi\left(\frac{1}{p^n}\right) C \frac{(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}}{n^{\frac{n-1}{2}}} x^{\frac{n}{2}} \int_0^\infty J_{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots, \frac{n-1}{n}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{\frac{sx^n}{n^n}} \right] \frac{f(s)}{\sqrt{s}} ds$$

Ces formules évidemment ne sont valables que si l'intégrale qui figure dans le second membre des égalités symboliques est convergente. Aucune difficulté si on envisage les valeurs de s voisines de zéro : il suffit que $f(s)$ soit d'un ordre infinitésimal (par rapport à s) > -1 . Si on envisage les valeurs infiniment grandes de la variable, on connaît la valeur asymptotique de $J_n(z)$ qui est

$$C e^{\frac{z \cos \frac{\pi}{n+1}}{n}} \sin \left(z \sin \frac{\pi}{n+1} + \alpha \right) z^{\frac{2}{n}}$$

où C et α sont des constantes. Il y aura convergence, au moins pour certaines valeurs de x , si $f(s)$ tend vers zéro exponentiellement, au moins comme $e^{-\sqrt[n+1]{s}}$.

② Toutes ces formules s'étendent sans difficulté au cas du calcul symbolique à n variables. Bornons-nous au cas de deux variables.

Nous partirons de la relation (R) et de la relation analogue donnant l'original de $\frac{1}{q^{k'm}} e^{-\frac{t}{q^m}}$, donc l'original de $\frac{1}{p^{kn} q^{k'm}} e^{-\frac{s}{p^n} - \frac{t}{q^m}}$. En multipliant par $f(s,t)$ $ds dt$ et en intégrant entre 0 et ∞ , on en déduit la correspondance

$$p^{n(1-k)} q^{m(1-k')} \varphi\left(\frac{1}{p^n}, \frac{1}{q^m}\right) \ll \frac{x^{kn} y^{k'm}}{\Gamma(kn+1) \Gamma(k'm+1)} \times \\ \times \int_0^\infty \int_0^\infty {}_0F_n\left(k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}, \dots, k+1; -\frac{sx^n}{n^n}\right) \times \\ \times {}_0F_m\left(k' + \frac{1}{m}, k' + \frac{2}{m}, \dots, k'+1; -\frac{ty^m}{m^m}\right) f(s,t) ds dt$$

On pourrait aussi transformer cette correspondance pour mettre en évidence les fonctions hyperbesséliennes. L'original de l'expression précédente serait

$$\frac{(2\pi)^{\frac{m+n}{2}-1}}{\sqrt{mn}} \left(\frac{x}{n}\right)^{\frac{n^2+(2K-1)n}{2(n+1)}} \left(\frac{y}{m}\right)^{\frac{m^2+(2K'-1)m}{2(m+1)}} \int_0^\infty \int_0^\infty s^{\frac{n-1-2kn}{2(n+1)}} t^{\frac{m-1-2k'm}{2(m+1)}} \times \\ \times J_{k, k-\frac{1}{n}, \dots, k-\frac{(n-1)}{n}}^{(n)} \left[(n+1) \sqrt{\frac{sx^n}{n^n}} \right] \times J_{k', k'-\frac{1}{m}, \dots, k'-\frac{(m-1)}{m}}^{(m)} \left[(m+1) \sqrt{\frac{ty^m}{m^m}} \right] f(s, t)$$

Cette formule se simplifie pour $k=0$ $k'=1$. On a par exemple, si $m=n=2$

$$\varphi\left(\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}\right) \ll \frac{\pi}{4} xy \int_0^\infty \int_0^\infty J_{1, \frac{1}{2}}\left(3\sqrt{\frac{sx^2}{4}}\right) J_{1, \frac{1}{2}}\left(3\sqrt{\frac{ty^2}{4}}\right) \frac{f(s,t)}{\sqrt{st}} ds dt \\ p^2 q^2 \varphi\left(\frac{1}{p^2}, \frac{1}{q^2}\right) \ll \pi \left(\frac{xy}{4}\right)^{\frac{1}{3}} \int_0^\infty \int_0^\infty (st)^{\frac{1}{6}} J_{0, -\frac{1}{2}}\left(3\sqrt{\frac{sx^2}{4}}\right) J_{0, -\frac{1}{2}}\left(3\sqrt{\frac{ty^2}{4}}\right) f(s,t) ds$$

CHAPITRE V

EQUATIONS DIFFERENTIELLES

1. — EQUATION DIFFÉRENTIELLE A LAQUELLE SATISFAIT LA FONCTION $J^{(n)}$

On a vu plus haut, en étudiant les relations de récurrence entre les J que la fonction $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}$ satisfait à une équation différentielle de la forme

$$(E) \quad x^n \frac{d^n y}{dx^n} + \alpha_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + \alpha_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} + \dots + \alpha_{n-1} x y' + \alpha_n y = x^n J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}^{(n)}(x)$$

Les coefficients $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ sont calculés à partir des relations

$$\alpha_n = \sigma_n \quad \alpha_n + \alpha_{n-1} = 1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_n$$

$$(1) \quad k! \alpha_{n-k} + \frac{k!}{1!} \alpha_{n-k+1} + \frac{k!}{2!} \alpha_{n-k+2} + \dots + \frac{k!}{(k-1)!} \alpha_{n-1} + \frac{k!}{k!} \alpha_n = k^n + k^{n-1} \sigma_1 + k^{n-2} \sigma_2 + \dots + k^{n-k} \sigma_k + \dots + k \sigma_{n-1} + \sigma_n$$

et ainsi de suite. En particulier $\alpha_1 = \sigma_1 + \frac{n(n-1)}{2} \cdot \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_k,$

\dots, σ_n désignant la somme des produits partiels obtenus en multipliant 1, 2, \dots, k, \dots, n des coefficients $n\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n, n\lambda_2 - \lambda_1 - \lambda_3 - \dots - \lambda_n, \dots$ qui ont été notés A_1, A_2, \dots, A_n .

Or, si on dérive (E) par rapport à x , on obtient

$$(2) \quad \sum_{k=1}^n \alpha_{n-k} \left(x^k \frac{d^{k+1} y}{dx^{k+1}} + k x^{k-1} \frac{d^k y}{dx^k} \right) + \alpha^n \frac{dy}{dx} = n x^{n-1} J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}^{(n)} + x^n J'_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}(x).$$

Si on tient compte de la relation de récurrence

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n) J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x) - x J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}(x) = x J_{\lambda_1+1, \lambda_2+1, \dots, \lambda_n+1}(x)$$

écrite sous la forme

$$(3) (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n - n) J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}(x) - x J'_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}(x) = x J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}.$$

Entre (E) (2) et (3), on éliminera $J_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}$ et $J'_{\lambda_1-1, \lambda_2-1, \dots, \lambda_n-1}$ et on obtiendra l'équation différentielle à laquelle satisfait la fonction $J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}$.

$$(E') \quad x^{n+1} y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} x^{(n)} y^n + \dots + [(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}] x^k y^{(k)} + \dots - \sigma_1 \alpha_n y + x^{n+1} y = 0$$

où k prend les valeurs $n-1, n-2, \dots, 2, 1$.

THÉORÈME. — *Si les coefficients $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ ne sont pas entiers ou si la différence de deux d'entre eux n'est ni nulle, ni égale à un entier, l'équation différentielle (E') admet les $(n+1)$ solutions distinctes*

$$J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} J_{-\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1} J_{-\lambda_2, \lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_n - \lambda_2} \dots J_{-\lambda_n, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_n - 1 - \lambda_n}$$

Nous allons montrer que le changement de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ en $-\lambda_1, \lambda_2, -\lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1$ par exemple n'altère pas les coefficients de l'équation différentielle. Tout d'abord, un tel changement laisse inchangés les coefficients A_2, A_3, \dots, A_n change A_1 en $-\sigma_1$ et la somme σ_1 en $-A_1$. Il est dès lors immédiat que le coefficient de y qui est égal à $-\sigma_1 \sigma_n$ reste le même.

Le coefficient de xy' est égal à

$$(1 - \sigma_1) \alpha_{n-1} + \alpha_n = (1 - \sigma_1) (1 + \sigma_1 + \sigma_2 + \dots + \sigma_{n-1} + \sigma_n) = 1 + (\sigma_2 - \sigma_1^2) + (\sigma_3 - \sigma_1 \sigma_2) + \dots + (\sigma_{k+1} - \sigma_1 \sigma_k) + \dots + \sigma_n - \sigma_1 \sigma_{n-1}$$

Or, le terme $\sigma_{k+1} - \sigma_1 \sigma_k$ vaut par définition

$$\Sigma A_1 A_2 \dots A_{k+1} - \sigma_1 \Sigma A_1 A_2 \dots A_k$$

ou en mettant en évidence les produits qui renferment ou non A_1

$$A_1 \Sigma A_2 \dots A_{k+1} - \sigma_1 A_1 \Sigma A_2 \dots A_k + \Sigma A_2 A_3 \dots A_{k+2} - \sigma_1 \Sigma A_2 \dots A_{k+1}$$

On voit que le terme envisagé reste le même.

Nous raisonnerons ensuite par récurrence et nous montrerons que si les coefficients de $y, xy', x^2y'', \dots, x^{k-1} y^{(k-1)}$ restent inchangés, il en est de même de $x^k y^{(k)}$. C'est-à-dire que si

$$-\sigma_1 \sigma_n; (1 - \sigma_1) \alpha_{n-1} + \alpha_n; (2 - \sigma_1) \alpha_{n-2} + \alpha_{n-1}; \dots \\ (k - 1 - \sigma_1) \alpha_{n-k+1} + \alpha_{n-k+2}$$

restent inchangés, il en est de même de

$$(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}$$

Pour l'établir, multiplions la relation (1) par $\frac{k - \sigma_1}{k!}$

$$(k - \sigma_1) \left(\alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1} + \frac{1}{2!} \alpha_{n-k+2} + \frac{1}{3!} \alpha_{n-k+3} + \dots + \frac{1}{(k-1)!} \alpha_{n-1} + \frac{1}{k!} \alpha_n \right) \\ = \frac{k - \sigma_1}{k!} [k^n + k^{n-1} \sigma_1 + k^{n-2} \sigma_2 + \dots + k^{n-k} \sigma_k + \dots + k \sigma_{n-1} + \sigma_n]$$

Or, le second membre peut se développer de façon à mettre en évidence les termes $\sigma_{k+1} - \sigma_1 \sigma_k$ qui, on l'a vu, restent inchangés et le premier membre peut s'écrire

$$[(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}] + [(k - 1 - \sigma_1) \alpha_{n-k+1} + \alpha_{n-k+2}] + \\ + \frac{1}{2!} [(k - 2 - \sigma_1) \alpha_{n-k+2} + \alpha_{n-k+3}] + \dots + \frac{1}{(k-1)!} [(1 - \sigma_1) \alpha_{n-1} + \alpha_n] - \frac{\sigma_1 \alpha_n}{k!}$$

ce qui montre que les $(n + 1)$ fonctions J sont bien solutions de (E')

Pour montrer qu'elles sont distinctes, formons le wronskien de ces $(n + 1)$ fonctions. Les coefficients de $y^{(n+1)}$ et $y^{(n)}$ dans (E') peuvent être rendus égaux à 1 et $\frac{n(n+1)}{2x}$, le wronskien, d'après la formule de Liouville vaut donc $C e^{\int \frac{n(n+1)dx}{2x}} = \frac{C}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$ C'étant une constante

$$\begin{vmatrix}
 J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} & J_{-\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1} & \dots & J_{-\lambda_n, \lambda_2 - \lambda_n, \dots, \lambda_n - 1 - \lambda_n} \\
 J'_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} & J'_{-\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1} & & J'_{-\lambda_n, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_n = 1 - \lambda_n} \\
 J''_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} & J''_{-\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1} & & J''_{-\lambda_n, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_n - 1 - \lambda_n} \\
 \dots & \dots & \dots & \dots \\
 J^{(n)}_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n} & J^{(n)}_{-\lambda_1, \lambda_2 - \lambda_1, \dots, \lambda_n - \lambda_1} & & J^{(n)}_{-\lambda_n, \lambda_1 - \lambda_n, \dots, \lambda_n = 1 - \lambda_n}
 \end{vmatrix} = \frac{C}{x^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

où dans la dernière ligne, *contrairement aux notations des chapitres précédents*, l'indice supérieur indique l'ordre de dérivation. Pour déterminer la constante C, on développera les fonctions hyperbesséliennes en série en ne faisant intervenir que le premier terme du développement. Le calcul se fait assez facilement en faisant intervenir les quantités A_1, A_2, \dots, A_n dont il a été question plus haut, avec $A_1 + A_2 + \dots + A_n = \lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n$. Après division par

$$\left(\frac{x}{n+1} \right)^{-\frac{n(n+1)}{2}}, \text{ il restera un déterminant de Vandermonde.}$$

$$\begin{vmatrix}
 1 & \frac{A_1}{n+1} & \frac{A_1^2}{(n+1)^2} & \dots & \frac{A_1^n}{(n+1)^n}
 \end{vmatrix}$$

et on obtiendra

$$C = \left(\frac{n+1}{\pi} \right)^{\frac{n(n+1)}{2}} \sin \pi \lambda_1 \sin \pi \lambda_2 \dots \sin \pi \lambda_n \times \prod \sin (\lambda_j - \lambda_i) \pi$$

avec

$$\begin{aligned}
 \prod (\lambda_j - \lambda_i) &= (\lambda_n - \lambda_1)(\lambda_n - \lambda_2) \dots (\lambda_n - \lambda_{n-1})(\lambda_{n-1} - \lambda_1)(\lambda_{n-1} - \lambda_2) \\
 &\dots (\lambda_{n-1} - \lambda_{n-2}) \dots (\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)(\lambda_2 - \lambda_1)
 \end{aligned}$$

La solution générale est donc en défaut si la différence de deux indices est nulle ou égale à un nombre entier ou si un des indices est nul ou égal à un entier.

Equation différentielle de la fonction $I_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}$. Elle est évidemment de même forme que (E') avec le seul changement de $x^{n+1}y$ en $-x^{n+1}y$.

Equations différentielles des $ber^{(n)}$ *et* $bei^{(n)}$

Puisque $ber^{(n)} + i bei^{(n)} = I^{(n)} \left(x i^{\frac{1}{n+1}} \right)$ à une facteur multiplicatif

près, ce qui précède permet donc d'écrire que $I\left(x i^{\frac{1}{n+1}}\right)$ satisfait à

$$x^{n+1} y^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} x^n y^{(n)} + \dots + \\ + [(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}] x^k y^{(k)} + \dots - \sigma_1 \alpha_n y - iy = 0$$

et si on pose $ber + i bei = \mu + iv$, on voit que μ et v satisfont au système d'équations différentielles

$$\left\{ \begin{array}{l} x^{n+1} \mu^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} x^n \mu^{(n)} + \dots + \\ + [(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}] x^k \mu^{(k)} + \dots - \sigma_1 \alpha_n \mu + v = 0 \\ x^{n+1} v^{(n+1)} + \frac{n(n+1)}{2} x^n v^{(n)} + \dots + \\ + [(k - \sigma_1) \alpha_{n-k} + \alpha_{n-k+1}] x^k v^{(k)} + \dots - \sigma_1 \alpha_n v - \mu = 0 \end{array} \right.$$

2. — EQUATION DIFFÉRENTIELLE $\frac{d^n y}{dx^n} \pm x^q y = 0$

Cette équation différentielle très simple s'intègre au moyen des fonctions hyperbesséliennes. On montrera que $\frac{d^n y}{dx^n} + x^q y = 0$ admet pour solution

$$x^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{1}{n+q}}^{(n-1)}, \frac{2}{n+q}, \dots, \frac{n-k-1}{n+q}, \frac{-k}{n+q}, \dots, \frac{-2}{n+q}, \frac{-1}{n+q} \left(\frac{n}{n+q} x^{\frac{n+q}{n}} \right)$$

où k prend les valeurs $0, 1, 2, \dots, n-1$. On le vérifie par calcul direct. En utilisant la définition de la fonction J , on devra vérifier que

$$_1 = x^{n-1-k} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^\lambda x^{(n+q)\lambda}}{(n+q)^{n\lambda} \Gamma\left(1 + \frac{1}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{n-k-1}{n+q} + \lambda\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(1 - \frac{1}{n+q} + \lambda\right)}$$

est solution de l'équation différentielle étudiée. Or, la dérivée n^{me}

de cette fonction est

$$\sum_{\lambda=1}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{[(n+q)\lambda + n - 1 - k] [(n+q)\lambda + n - 2 - k] \dots [(n+q)\lambda - k] x^{(n+q)\lambda - 1 - k}}{(n+q)^{n\lambda} \lambda! \Gamma\left(1 + \frac{1}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(\lambda + 1 + \frac{n-k-1}{n+q}\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(1 - \frac{1}{n+q}\right)}$$

Comme

$$x^q y_1 = \sum_{\lambda=0}^{\infty} (-1)^{\lambda} \frac{x^{(n+q)\lambda + n - 1 - k + q}}{(n+q)^{n\lambda} \lambda! \Gamma\left(1 + \frac{1}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(1 + \frac{n-k-1}{n+q} + \lambda\right) \Gamma\left(1 - \frac{k}{n+q} + \lambda\right) \dots \Gamma\left(1 - \frac{1}{n+q}\right)}$$

y_1 sera donc solution si l'on a

$$\begin{aligned} & [(n+q)\lambda + (n-1-k)] \dots [(n+q)\lambda - k] = \\ & = (n+q)^n \lambda \left(\frac{1}{n+q} + \lambda\right) \dots \left(\frac{n-k-1}{n+q} + \lambda\right) \dots \left(\lambda - \frac{k}{n+q}\right) \left(1 - \frac{1}{n+q}\right) \end{aligned}$$

ce qui est bien vérifié.

De même l'équation $(E_1) \frac{d^n y}{dx^n} - x^q y = 0$ admet les n solutions distinctes

$$x^{\frac{n-1}{2}} \frac{\Gamma(\frac{n-1}{2})}{n+q}, \frac{2}{n+q}, \dots, \frac{n-k-1}{n+q}, \frac{-k}{n+q}, \dots, \frac{-2}{n+q}, \frac{-1}{n+q} \left(\frac{n}{n+q} x^{\frac{n+q}{n}} \right)$$

La solution est évidemment en défaut si $n+q=0$, mais dans ce cas, l'équation différentielle est une équation d'Euler.

L'équation différentielle $\frac{d^n y}{dx^n} = x^m y$ avait déjà été intégrée par Kummer dans le cas de m entier positif. Il avait montré que cette équation est vérifiée par

$$(E_2) y = \int_0^{\infty} u^{m-1} e^{-\frac{u(m+n)}{m+n}} \Psi(xu) du$$

où la fonction $\psi(x)$ satisfait à l'équation $(E_3) \frac{d^{n+1} \Psi}{dx} = x^{m-1} \Psi$

L'intégrale de (E_1) étant connue pour $m=0$, on en déduira l'intégrale pour $m=1, m=2, \dots$. Remarquons d'ailleurs que la méthode de Kummer, jusqu'à l'obtention de (E_3) ne suppose pas m entier.

Or, nous savons intégrer (E_1) , quel que soit m . La méthode de

Kummer nous donnera donc des relations entre certaines fonctions hyperbesséliennes particulières. Nous avons obtenu

$$x^{\frac{n-1}{2}} J_{\frac{n}{m+n}}^{(n-1)} = \frac{2}{m+n} \dots \frac{n-k-1}{m+n} \dots \frac{-k}{m+n} \dots \frac{-1}{m+n} \left(\frac{n}{m+n} x^{\frac{m+n}{n}} \right) \\ = \int_0^\infty u^{m-1} e^{-\frac{u^{m+n}}{m+n}} (ux)^{\frac{n}{2}} J_{\frac{n}{m+n}}^{(n)} \dots \frac{n-k-1}{m+n} \dots \frac{(k+1)}{m+n} \dots \frac{-1}{m+n} \left[\frac{(n+1)}{m+n} (ux)^{\frac{m+n}{n+1}} \right] \times du$$

Pour établir cette relation, on a développé les fonctions hyperbesséliennes en série et intégré terme à terme.

Généralisation des intégrales de Sonine

Première intégrale de Sonine. On connaît pour les fonctions de Bessel ordinaires la formule de Sonine au moyen d'une intégrale renfermant une fonction de Bessel d'ordre moins important.

$$J_{\mu+\nu-1}(x) = \frac{x^{\nu-1}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \int_0^\pi J_\mu(x \sin \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{2\nu+1} \theta d\theta$$

On peut obtenir une formule analogue pour les fonctions hyperbesséliennes d'ordre n au moyen d'une intégrale multiple renfermant une fonction du même ordre, mais d'indices inférieurs.

$$(R) J_{\lambda_1+\mu_1+1, \lambda_2+\mu_2+1, \dots, \lambda_n+\mu_n+1}^{(n)}(x) = \\ = \frac{2^n \left(\frac{x}{n+1} \right)^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n+n}}{\Gamma(\mu_1+1) \Gamma(\mu_2+1) \dots \Gamma(\mu_n+1)} \int_0^\pi \int_0^\pi \dots \int_0^\pi J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left(\frac{x \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_1 \dots \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_n}{\sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_n} \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \sin^{\frac{2(n\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)}{n+1}} \theta_i \cos^{2\mu_i+1} \theta_i d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n$$

En effet

$$J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)} \left(x \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_1 \dots \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_n \right) = \left(\frac{x}{n+1} \right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} \times \prod_{i=1}^n \sin^{\frac{2}{n+1}(\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n)} \theta_i \times \\ \times \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{n+1} \right)^{k(n+1)} \sin^{2k} \theta_1 \sin^{2k} \theta_2 \dots \sin^{2k} \theta_n}{\Gamma(k+\lambda_1+1) \Gamma(k+\lambda_2+1) \dots \Gamma(k+\lambda_n+1) k!}$$

On a donc à effectuer des intégrales de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2\lambda_i+1}\theta_i \cos^{2\mu_i+1}\theta_i d\theta_i = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(k+\lambda_i+1)}{\Gamma(k+\lambda_i+\mu_i+2)} \frac{\Gamma(\mu_i+1)}{\Gamma(k+\lambda_i+\mu_i+2)}$$

Le second membre de la relation (R) est donc égal à

$$\left(\frac{x}{n+1}\right)^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n+n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{x}{n+1}\right)^{k(n+1)}}{\Gamma(k+\lambda_1+\mu_1+2) \Gamma(k+\lambda_2+\mu_2+2) \dots \Gamma(k+\lambda_n+\mu_n+2) k!}$$

ce qui est la définition de $J_{\lambda_1+\mu_1+1, \lambda_2+\mu_2+1, \dots, \lambda_n+\mu_n+1}^{(n)}$

Deuxième intégrale de Sonine. Pour les fonctions de Bessel ordinaires, Sonine a établi la relation

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\mu}(z \sin \theta) J_{\nu}(Z \cos \theta) \sin^{\mu+1} \theta \cos^{\nu+1} \theta d\theta = \frac{z^{\mu} Z^{\nu} J_{\frac{\mu+\nu+1}{2}}(\sqrt{Z^2+z^2})}{(Z^2+z^2)^{\frac{\mu+\nu+1}{2}}}$$

Pour les fonctions hyperbesséliennes, on aura une formule analogue faisant intervenir une intégrale multiple

$$\begin{aligned} & \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \dots \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n}^{(n)}(z \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_1 \dots \sin^{\frac{2}{n+1}} \theta_n) \times J_{\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n}^{(n)}(Z \cos^{\frac{2}{n+1}} \theta_1 \dots \cos^{\frac{2}{n+1}} \theta_n) \times \\ & \times \left[\prod_{i=1}^n \sin^{\frac{2(n\lambda_i - \lambda_1 - \lambda_2 - \dots - \lambda_n)}{n+1}} \theta_i \cos^{\frac{2(n\mu_i - \mu_1 - \mu_2 - \dots - \mu_n)}{n+1}} \theta_i \right] d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \\ & = \left(\frac{n+1}{2}\right)^n \frac{z^{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n} Z^{\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n} J_{\lambda_1+\mu_1+1, \lambda_2+\mu_2+1, \dots, \lambda_n+\mu_n+1}^{(n)} \left(\sqrt{Z^{n+1}+z^{n+1}}\right)}{(Z^{n+1}+z^{n+1})^{\frac{\lambda_1+\lambda_2+\dots+\lambda_n+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n+n}{n+1}}} \end{aligned}$$

Pour ne pas surcharger les notations, nous la démontrerons dans le cas des fonctions $J_{m,n}$. En effet

$$\begin{aligned} & [J_{m,n}(z \sin^{\frac{2}{3}} \theta \sin^{\frac{2}{3}} \theta')] \times \sin^{\frac{2}{3}(2m-n)+1} \theta \sin^{\frac{2}{3}(2n-m)+1} \theta' \\ & = \left(\frac{z}{3}\right)^{m+n} \sin^{2m+1} \theta \sin^{2n+1} \theta' \times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k \left(\frac{z}{3}\right)^{3k} \sin^{2k} \theta \sin^{2k} \theta'}{\Gamma(m+k+1) \Gamma(n+k+1) k!} \end{aligned}$$

De même

$$[J_{m',n'}(Z \cos^{\frac{2}{3}} \theta \cos^{\frac{2}{3}} \theta')] \times \cos^{\frac{2}{3}(2m-n)+1} \theta \cos^{\frac{2}{3}(2n-m)+1} \theta' \\ = \left(\frac{Z}{3}\right)^{m'+n'} \cos^{2m'+1} \theta \cos^{2n'+1} \theta' \times \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k'} \left(\frac{Z}{3}\right)^{3k'} \cos^{2k'} \theta \cos^{2k'} \theta'}{\Gamma(m'+k'+1) \Gamma(n'+k'+1) k'!}$$

En multipliant les 2 fonctions l'une par l'autre, on obtiendra

$$\left(\frac{Z}{3}\right)^{m+n} \left(\frac{Z}{3}\right)^{m'+n'} \sin^{2m+1} \theta \cos^{2m'+1} \theta \sin^{2n+1} \theta' \cos^{2n'+1} \theta' \times \\ \times \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+k'} \left(\frac{Z}{3}\right)^{3k} \left(\frac{Z}{3}\right)^{3k'} \sin^{2k} \theta \dots \cos^{2k'} \theta'}{\Gamma(m+k+1) \dots \Gamma(n'+k'+1) k! k'!}$$

Si on intègre entre 0 et $\frac{\pi}{2}$ pour θ et θ' , il faudra calculer des expressions de la forme

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2m+1} \theta \cos^{2k'+2m'+1} \theta d\theta \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2k+2n+1} \theta' \cos^{2k'+2n'+1} \theta' d\theta' \\ = \frac{1}{4} \frac{\Gamma(k+m+1) \Gamma(k'+m'+1) \Gamma(k+n+1) \Gamma(k'+n'+1)}{\Gamma(k+k'+m+m'+2) \Gamma(k+k'+n+n'+2)}$$

Le premier membre de la relation à établir vaut donc

$$\frac{1}{2^2} \left(\frac{z}{3}\right)^{m+\lambda} \left(\frac{Z}{3}\right)^{m'+n'} \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{k'=0}^{\infty} \frac{(-1)^{k+k'} \left(\frac{z}{3}\right)^{3k} \left(\frac{Z}{3}\right)^{3k'}}{\Gamma(k+k'+m+m'+2) \Gamma(k+k'+n+n'+2) k! k'!}$$

Effectuons la somme de la série double en groupant les termes tels que $k + k' = \lambda$: on aura à effectuer la somme partielle

$$\sum_{k=0}^{\lambda} \frac{\left(\frac{z}{3}\right)^{3k} \left(\frac{Z}{3}\right)^{3\lambda-3k}}{k! (\lambda - k)!} = \frac{1}{3^{3\lambda}} \frac{(Z^3 + z^3)^{\lambda}}{\lambda!}$$

Le premier membre est donc égal à

$$\frac{1}{4} \left(\frac{z}{3}\right)^{m+n} \left(\frac{Z}{3}\right)^{m'+n'} \sum_{\lambda=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lambda} (Z^3 + z^3)^{\lambda}}{3^{3\lambda} \lambda! \Gamma(\lambda+m+m'+2) \Gamma(\lambda+n+n'+2)}$$

En formant le développement de $\frac{1}{4} J_{m+m'+1, n+n'+1} (\sqrt[3]{Z^3+z^3})$, on déduit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} J_{m,n} (z \sin^{\frac{2}{3}} \theta \sin^{\frac{2}{3}} \theta') J_{m',n'} (Z \cos^{\frac{2}{3}} \theta \cos^{\frac{2}{3}} \theta') \sin^{\frac{2}{3}(2m-n)+1} \theta \sin^{\frac{2}{3}(2n-m)+1} \theta' \\ \times \cos^{\frac{2}{3}(2m'-n')+1} \theta' \cos^{\frac{2}{3}(2n'-m')+1} \theta' d\theta d\theta' = \left(\frac{3}{2}\right)^2 \frac{z^{m+n} Z^{m'+n'} J_{m+m'+1, n+n'+1} (\sqrt[3]{Z^3+z^3})}{(Z^3+z^3)^{\frac{m+n+1+m'+n'+1}{3}}}$$

Nous généraliserons aussi l'intégrale exponentielle de Weber

$$\int_0^{\infty} J_0(at) e^{-b^2 t^2} t dt = \frac{1}{2b^2} e^{-\frac{a^2}{4b^2}}$$

Elle s'établit aisément par calcul symbolique et c'est par ce moyen que nous la généraliserons aux fonctions hyperbesséliennes. De la relation symbolique

$$J_{0,0,\dots,0}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x}] \supset J_{0,0,\dots,0}^{n-1} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right) \text{ ou } J_{0,0,\dots,0}^{n-1} \left(\frac{n}{\sqrt{p}} \right) = \\ = p \int_0^{\infty} e^{-px} J_{0,0,\dots,0}^{(n)} [(n+1) \sqrt{x}] dx$$

$$\text{on tire en posant } (n+1) \sqrt{x} = at \quad p = \left[\frac{b(n+1)}{a} \right]^{n+1}$$

$$\int_0^{\infty} J_{0,0,\dots,0}^{(n)} (at) e^{-b^2 t^2} t^n dt = \frac{1}{(n+1)b^{n+1}} J_{0,0,\dots,0}^{(n-1)} \left[n \left(\frac{a}{b+bn} \right)^{1+\frac{1}{n}} \right]$$

La formule plus générale due à Hankel

$$\int_0^{\infty} J_{\nu}(at) e^{-b^2 t^2} t^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+\mu}{2}\right) \left(\frac{a}{2b}\right)^{\nu}}{2b^{\mu} \Gamma(\nu+1)} {}_1F_1\left(\frac{\nu+\mu}{2}, \nu+1; -\frac{a^2}{4b^2}\right)$$

se généralise aussi grâce aux images symboliques.

Nous terminerons en signalant une dernière application à deux équations aux dérivées partielles. Monsieur Humbert a montré que l'équation aux dérivées partielles

$$\Delta_3 U + U = 0 = \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 U}{\partial z^3} - 3 \frac{\partial^3 U}{\partial x \partial y \partial z} + U$$

admet les trois solutions simples

$$(1) \quad J_{m,m}(r) \cdot P(m\theta, m\varphi) \quad J_{m,m}(r) \cdot Q(m\theta, m\varphi) \quad J_{m,m}(r) \cdot R(m\theta, m\varphi)$$

$$\text{où} \quad x = r P(\theta, \varphi) \quad y = r Q(\theta, \varphi) \quad z = r R(\theta, \varphi)$$

P, Q, R étant les cosinus d'Appell.

D'autre part, étudiant l'équation $\frac{\partial}{\partial x} (\Delta U) - 64xU = 0$ qui s'introduit dans des questions de potentiel non newtonien, il a montré les liens étroits qui existent entre cette équation et les fonctions $J_{m,n}$.

Or, ces résultats peuvent être généralisés. Si l'on emploie les notations qu'a utilisées M. Botea quand il a généralisé l'équation de M. Humbert, l'équation aux dérivées partielles du n^{me} ordre.

$$\left| \begin{array}{cccc} \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_n} \\ \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} \\ \frac{\partial}{\partial x_{n-1}} & \frac{\partial}{\partial x_n} & \frac{\partial}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_{n-2}} \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} & \frac{\partial}{\partial x_4} & \cdots & \frac{\partial}{\partial x_1} \end{array} \right| (U) + U = 0$$

admet des solutions du type (1), mais où les fonctions de Bessel du 3^e ordre $J_{m,m}$ sont remplacées par des fonctions hyperbesséliennes d'ordre $n - 1$ et où les trois fonctions P, Q, R sont remplacées par les cosinus d'Appell d'ordre $n - 1$.

De plus, les équations aux dérivées partielles du 4^e et du 5^e ordre

$$\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\Delta U) + 81xy U = 0$$

$$\frac{\partial^3}{\partial x \partial y \partial z} (\Delta U) + 4^5 xyz U = 0$$

ont des solutions qui s'expriment au moyen de fonctions hyperbesséliennes d'ordre 3 ou 4.

BIBLIOGRAPHIE SOMMAIRE

1. P. HUMBERT. Le calcul symbolique à 2 variables (*Annales de la Société Scientifique de Bruxelles*. Tome 56; 1936 Série A p. 26-43.)
 2. M. PARODI. Applications physiques de la transformation de Laplace (*C. N. R. S.* 1948 p. 115-133).
Equations intégrales et transformations de Laplace (*Publications scientifiques et techniques du ministère de l'air* 1950).
 3. L. POLI. Sur les fonctions réciproques (*Annales de l'Université de Lyon*, 1947 X p. 23-38).
 4. P. HUMBERT. a) les fonctions de Bessel du 3^e ordre (*Atti dell. Pont. Acc. delle Scienze Nuovi Lincei*. Anno 83 fasc. III 16 F. 1930.)
b) Nouvelles remarques sur les fonctions de Bessel du 3^e ordre (*op. cit.* Anno 87 1934 p. 323-331).
c) Sur une équation aux dérivées partielles (*op. cit.* Anno 88 1935).
 5. KUMMER. Sur l'équation $\frac{d^n y}{dx^n} = x^n y$ (*Journal de Crelle*. Tome XIX p. 286. Année 1839).
 6. LIOUVILLE (Journal de) Sur une équation différentielle de M.-Kummer (1839).
 7. KARNANIKOLOFF (*Comptes Rendus de l'Académie Bulgare des Sciences* T. 2 n° 1. Janvier-Mars 1949) Sur une équation différentielle envisagée par Kummer.
 8. DOETSCH et VOELKER. Die zweidimensionale Laplace-Transformation (1950) Basel.
-

Sciences Physiques et Chimiques

Influence de l'anharmonicité sur le calcul
de la fonction potentielle des molécules C_2H_4 et H_2O

PAR

MM. CH. MANNEBACK et A. RAHMAN (*)

RÉSUMÉ — In the absence of sufficient experimental information regarding the anharmonicity of molecular vibrations, the difficulties arising in the calculation of the potential function have been studied by taking as examples the case of ethylene and water vapour. It is shown in the case of ethylene that different but equally valid empirical methods of making the anharmonic correction lead to widely different potential functions, the non-diagonal constants of the potential energy matrix being the most affected. The case of water vapour is still more convincing because of accurate knowledge of the anharmonicity of its vibrations.

It has also been pointed out that the possibility of being able to calculate by means of a certain potential function a set of frequencies agreeing closely with all the observed frequencies is not sufficient for the unqualified acceptance of the potential function, because an equally satisfactory fit can be obtained on using a widely different potential function.

INTRODUCTION

Le calcul de la fonction potentielle (F. P.) de vibration commune à une molécule et à ses isotopes est affecté de deux causes d'erreur. D'abord, les fréquences expérimentales ne sont connues qu'avec une précision limitée. La répercussion souvent inattendue de ce fait sur le calcul des paramètres de la F. P. de faible valeur absolue est ordinairement négligée; nous l'avons récemment étudiée en grand détail sur le cas des vibrations gauches de C_2H_3Br et de ses sept isotopes deutérés ⁽⁵⁾.

Une autre cause d'erreur, celle qui nous intéresse ici, provient de ce que les amplitudes des vibrations ne peuvent être considérées comme

(*) At present at the Institut de Physique of the University of Louvain, Belgium, while on leave from Osmania University, Hyderabad, Deccan, India.

infinitésimales, à l'échelle des dimensions moléculaires. Les fréquences expérimentales ne peuvent donc être considérées comme « harmoniques » et d'autre part le calcul d'une F.P. quadratique se fonde essentiellement sur cette hypothèse. Dans de très rares cas, comme ceux de CO_2 et H_2O , particulièrement bien étudiés par DARLING et DENNISON ⁽¹⁾, on connaît les valeurs des fréquences « harmoniques »; celles-ci sont liées au calcul d'une F.P. quadratique et des termes cubiques et biquadratiques qui la complètent. Ces cas exceptionnels exigent une connaissance étendue du spectre infra-rouge à grande dispersion.

En introduisant de force les fréquences expérimentales non harmoniques d'une famille de molécules isotopiques dans le calcul d'une F. P. harmonique, on provoque nécessairement certaines incompatibilités entre les équations du problème. Ainsi la valeur du « rapport isotopique » expérimental (quotient des produits de fréquences pour deux molécules isotopiques) diffère de quelques pour cent de la valeur théorique du même rapport, laquelle est seulement fonction des masses et dimensions moléculaires, (REDLICH-TELLER). Pour rétablir la compatibilité, on peut soit prendre la moyenne des équations incompatibles (à quelques pour cent près), soit la moyenne des résultats donnés séparément par ces équations. Un tel procédé a été ordinairement adopté par l'un d'entre nous dans des travaux antérieurs et a toujours permis de recalculer des valeurs de fréquences bien réparties à environ 1 % près autour des valeurs de départ ⁽⁷⁾. Une discussion plus détaillée a été donnée à propos des vibrations A_{1g} de C_6H_6 ⁽⁴⁾. On aboutit ainsi à une F.P. quadratique moyenne qui s'adapte de façon satisfaisante aux données empiriques, mais dont les paramètres sont affectés, de façon inconnue, par l'anharmonicité.

Une autre méthode consiste à « corriger » les données empiriques anharmoniques et à en déduire, grâce à la théorie quantique de l'oscillateur anharmonique à un degré de liberté, des valeurs « harmoniques », devant servir au calcul d'une F. P. dégagée de l'anharmonicité ⁽⁸⁾. La méthode, parfaitement claire dans le cas où il n'y a qu'un seul degré de liberté, devient ambiguë dans le cas habituel où le problème en contient plusieurs. Crawford a proposé de faire porter la correction uniquement sur la haute fréquence, provenant essentiellement de la vibration de valence CH. Cette façon de procéder a été suivie dans deux travaux récents ⁽²⁾, ⁽³⁾, auxquels nous nous référons plus loin. Malgré son apparence rationnelle, elle offre cependant des inconvénients sérieux, qui ont déjà été signalés ⁽²⁾ et qui ressortiront mieux des calculs qui vont suivre. La correction,

en effet, se base sur l'écart faible existant entre les valeurs théorique et expérimentale du « rapport isotopique », et est fort sensible à la valeur de cette petite différence. D'autre part, les meilleures données expérimentales ne permettent quand même pas de fixer cette petite quantité avec la précision qui s'imposerait ⁽²⁾. Il s'ensuit que le calcul des petites constantes d'interaction de la F. P., tout au moins, devient fort aléatoire et ceci jette un doute sur la signification physique à leur attribuer.

Le critère ordinairement accepté ⁽⁷⁾, ⁽²⁾, ⁽³⁾ de la qualité de la F. P. a été l'exactitude (1 à 2 %) avec laquelle il est possible de recalculer les fréquences de départ. Mais, comme des F. P. sensiblement différentes peuvent y satisfaire, ainsi qu'on le verra encore dans la suite, il apparaît que ce critère ne suffit plus.

La présente communication a pour objet de préciser ces remarques sur l'exemple des molécules C_2H_4 et H_2O .

2. *Ethylène*. — La F. P. commune aux sept molécules « isotopiques » C_2H_4 , C_2H_3D , $C_2H_2D_2$ (cis, trans, asym), C_2HD_3 et C_2D_4 a fait, depuis 1935, l'objet de nombreux travaux, dont nous ne retiendrons que les derniers de CHARETTE et MANNEBACK ⁽²⁾ et de CRAWFORD, LANCASTER et INSKEEP ⁽³⁾ (C. et al.). Les données expérimentales, rendues aussi homogènes que possible en les ramenant toutes à l'état de vapeur, sont tirées du premier travail. On remarquera cependant que la valeur numérique de ces données n'est pas en cause dans ce qui suit.

Pour la simplicité, on ne considérera que les trois classes de symétrie B_{1g} , B_{2u} et B_{3u} chez C_2H_4 et C_2D_4 , comportant chacune deux fréquences, ce qui permet la détermination rapide des F. P. correspondantes. Les coordonnées internes ⁽²⁾ seront des combinaisons linéaires, de symétrie convenable, des elongations relatives des noyaux H (ou D) par rapport aux noyaux C, comptées parallèlement d'abord et ensuite perpendiculairement aux directions de valence CH. L'elongation CC n'intervient pas dans les cas considérés. Les dimensions moléculaires sont celles données par HERZBERG (Polyatomic molecules) reprises loc. cit. ⁽²⁾.

(i) *vibrations* B_{2u} . — Les matrices « G » bien connues ⁽⁶⁾ de Wilson sont, en unités $1/16$ de masse O^{16} ,

$$C_2H_4 \begin{bmatrix} 1,11679 & -0,072206 \\ -0,072206 & 1,03369 \end{bmatrix}; C_2D_4 \begin{bmatrix} 0,62120 & -0,072206 \\ -0,072206 & 0,53810 \end{bmatrix}$$

La matrice de la F. P. sera

$$\begin{bmatrix} a & x \\ x & b \end{bmatrix} \text{ les paramètres étant exprimés en unités } 10^5 \times \text{dyn/cm} \\ \text{(Newton/cm).}$$

Les fréquences seront, partout dans la suite, exprimées en cm^{-1} ; les fréquences expérimentales adoptées sont :

$$\text{C}_2\text{H}_4 : 3106 \text{ et } 811; \quad \text{C}_2\text{D}_4 : 2345 \text{ et } 584 \text{ obs.}$$

Nous calculons maintenant la F. P. de différentes façons.

1) Posant, arbitrairement, le paramètre de couplage (valence — déformation) $x = 0$, on obtient deux F. P. légèrement différentes pour C_2H_4 et C_2D_4 , dont la moyenne est

$$\begin{bmatrix} 5,15 & 0 \\ 0 & 0,378 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{C}_2\text{H}_4 \text{ (3126; 813) calc.} \\ \text{C}_2\text{D}_4 \text{ (2332; 583) calc.} \end{array}$$

Les valeurs entre parenthèses sont les fréquences (en cm^{-1}) recalculées au moyen de la F. P.

1') Prenant la moyenne des deux équations aux produits des fréquences (voir appendice), on obtient un système compatible de trois équations, d'où l'on tire

$$\begin{bmatrix} 4,23 & -1,61 \\ -1,61 & 1,07 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{C}_2\text{H}_4 \text{ (3104; 815) calc.} \\ \text{C}_2\text{D}_4 \text{ (2346; 579) calc.} \end{array}$$

On observe l'abaissement de la constante diagonale a , le changement de signe de la constante de couplage x et l'énorme accroissement de la constante diagonale de déformation b .

2) On sait que le mouvement de haute fréquence est presque entièrement dû à la coordonnée radiale CH, tandis que celui de basse fréquence est principalement dû à la coordonnée transversale ou de déformation angulaire CH_2 . Par un procédé connu ⁽⁶⁾, on peut « bloquer » la coordonnée de haute fréquence, ce qui donne le paramètre b de basse fréquence, puis « libérer » la coordonnée de basse fréquence, ce qui donne le paramètre a de haute fréquence. Ce procédé d'approximation implique un paramètre d'interaction $x = 0$. Le résultat du calcul est, en se limitant aux décimales indiquées, identique au calcul précédent.

3) Si préalablement, on modifie les fréquences expérimentales en les rendant « harmoniques » suivant la méthode adoptée par C. M. ⁽²⁾, on obtient les valeurs expérimentales « corrigées » données entre crochets. Calculant ensuite à partir des valeurs précédentes, la F. P.

par la méthode approchée du « blocage » qui vient d'être mentionnée, on obtient

$$\begin{bmatrix} 5,74 & 0 \\ 0 & 0,378 \end{bmatrix} \text{ C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3308; 811 \\ (3300; 813) \end{bmatrix}; \text{ C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2455; 584 \\ (2462; 583) \end{bmatrix} \text{ corr. calc.}$$

où les fréquences entre parenthèses sont les fréquences recalculées à partir de la F.P.

4) Procédant de même, mais suivant la méthode de C. et al ^{(3)*}, on obtient

$$\begin{bmatrix} 6,05 & 0 \\ 0 & 0,381 \end{bmatrix} \text{ C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3410; 810 \\ (3388; 816) \end{bmatrix}; \text{ C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2509; 589 \\ (2527; 585) \end{bmatrix} \text{ corr. calc.}$$

5) La F. P. de C. M. donne

$$\begin{bmatrix} 5,79 & 0,512 \\ 0,512 & 0,420 \end{bmatrix} \text{ C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3308; 811 \\ (3308; 811) \end{bmatrix}; \text{ C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2455; 584 \\ (2455; 584) \end{bmatrix} \text{ corr. calc.}$$

6) La F. P. de C. et al. donne

$$\begin{bmatrix} 6,01 & 1,37 \\ 1,37 & 0,695 \end{bmatrix} \text{ C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3410; 810 \\ (3410; 810) \end{bmatrix}; \text{ C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2509; 589 \\ (2509; 589) \end{bmatrix} \text{ corr. calc.}$$

On observe d'abord qu'en imposant un couplage nul ($x = 0$) entre les coordonnées internes, on obtient des F. P. permettant de recalculer quand même les fréquences à moins de 1 %. Ensuite, que les F. P. 5) et 6) sont fort différentes, surtout pour les paramètres de basse fréquence b et le couplage x , alors que la correction d'anharmonicité n'a porté que sur la haute fréquence et que la différence de point de vue entre les deux méthodes de correction est infime et en tout cas arbitraire. (Voir appendice).

(ii) *vibrations* B_{1g} . — On obtient pour les matrices « G »

$$\text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 1,11679 & -0,30054 \\ -0,30054 & 1,71539 \end{bmatrix}; \text{ C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 0,62120 & -0,30054 \\ -0,30054 & 1,21980 \end{bmatrix}$$

Les fréquences expérimentales adoptées sont, sauf pour 5')

$$\text{C}_2\text{H}_4 : 3086 \text{ et } 1241; \quad \text{C}_2\text{D}_4 : 2315 \text{ et } 1011.$$

On obtient, avec les mêmes notations et définitions que plus haut :

(*) Ces auteurs ne donnent pas explicitement leurs valeurs de départ « corrigées ». Nous avons dû préalablement obtenir celles-ci par un calcul à rebours effectué sur leur F. P. complète.

3)

$$\begin{bmatrix} 5,42 & 0 \\ 0 & 0,558 \end{bmatrix} \quad \text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3215; 1241 \\ (3220; 1238) \end{bmatrix}; \quad \text{C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2385; 1011 \\ (2426; 994) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{corr.} \\ \text{calc.} \end{matrix}$$

5)

$$\begin{bmatrix} 5,57 & 0,319 \\ 0,319 & 0,556 \end{bmatrix} \quad \text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3215; 1241 \\ (3215; 1241) \end{bmatrix}; \quad \text{C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2385; 1011 \\ (2385; 1011) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{corr.} \\ \text{calc.} \end{matrix}$$

5')

$$\begin{bmatrix} 5,88 & 0,472 \\ 0,472 & 0,558 \end{bmatrix} \quad \text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3287; 1238 \\ (3287; 1238) \end{bmatrix}; \quad \text{C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2324; 1015 \\ (2424; 1015) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{corr.} \\ \text{calc.} \end{matrix}$$

6)

$$\begin{bmatrix} 6,15 & 0,506 \\ 0,506 & 0,556 \end{bmatrix} \quad \text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 3361; 1231 \\ (3361; 1231) \end{bmatrix}; \quad \text{C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 2477; 1010 \\ (2477; 1010) \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{corr.} \\ \text{calc.} \end{matrix}$$

La F. P. 5') est donnée par C. M. pour montrer l'effet produit par une légère modification des basses fréquences expérimentales, parfaitement endéans les limites des incertitudes de mesure pour le cas considéré ⁽²⁾ : C₂H₄, 1238 au lieu de 1241 et pour C₂D₄, 1015 au lieu de 1010. La correction de haute fréquence est ensuite faite comme dans le cas précédent 5). On note la répercussion sensible de ce faible changement sur le paramètre de couplage.

Comme précédemment, en imposant un couplage nul, on retrouve les fréquences de départ, mais cette fois avec une approximation un peu moins bonne : 1 % pour C₂H₄ et 1,7 % pour C₂D₄. Ceci se comprend si l'on remarque que le « couplage dynamique » (terme non diagonal de G) est sensiblement plus élevé pour les vibrations B_{1g} que pour B_{2u}.

(iii) vibrations B_{3u}. — Les matrices « G » sont :

$$\text{C}_2\text{H}_4 \begin{bmatrix} 1,03369 & 0,072206 \\ 0,072206 & 1,11679 \end{bmatrix}; \quad \text{C}_2\text{D}_4 \begin{bmatrix} 0,53810 & 0,072206 \\ 0,072206 & 0,62120 \end{bmatrix}$$

Il paraît inutile de répéter des résultats analogues à ceux-ci de B_{2u}. La petitesse du terme de couplage dans G appelle une remarque analogue à celle déjà faite. Nous nous bornons à reproduire les F. P.

cas 1' :
$$\begin{bmatrix} 4,210 & -0,623 \\ -0,623 & 1,727 \end{bmatrix}$$

$$\text{cas 3 : } \begin{bmatrix} 6,14 & 0 \\ 0 & 1,12 \end{bmatrix}$$

$$\text{cas 5 : } \begin{bmatrix} 6,193 & + 0,673 \\ + 0,673 & 1,175 \end{bmatrix}$$

Enfin, on a fait le calcul en répartissant également la correction d'anharmonicité sur la haute et la basse fréquence, ce qui a donné

$$\begin{bmatrix} 5,531 & - 0,1443 \\ - 0,1443 & 1,256 \end{bmatrix}$$

On observe, comme précédemment, les changements de signe de la constante α de couplage.

3. *Vapeur d'eau*. — La partie quadratique de la F. P. complète calculée dans des conditions particulières de précision par Darling et Dennison ⁽¹⁾ (D. D.) s'écrit

$$\begin{bmatrix} 4,1625 & + 0,2524 & 0 \\ + 0,2524 & 0,76814 & 0 \\ 0 & 0 & 4,2629 \end{bmatrix} \text{ avec des coordonnées internes } (\Delta r_1 + \Delta r_2), r\Delta\theta; (\Delta r_1 - \Delta r_2)$$

dont la signification est évidente. De cette F. P. « harmonique » on déduit les fréquences « harmoniques » (entre crochets) auxquelles sont juxtaposées les fréquences anharmoniques observées.

H₂O [3826, 1654; 3936] harm; 3650, 1595; 3755 obs.

D₂O [2758, 1210; 2884] harm; 2666, 1179; 2789 obs.

1) Si, à partir des valeurs expérimentales on avait calculé une F. P. en prenant la moyenne des équations aux produits des fréquences, comme en ¹_{bis}) ci-dessus, on aurait obtenu

$$\begin{bmatrix} 3,4060 & - 0,7728 & 0 \\ - 0,7728 & 0,97255 & 0 \\ 0 & 0 & 3,9335 \end{bmatrix} \begin{array}{l} \text{H}_2\text{O (3640, 1618; 3781) calc.} \\ \text{D}_2\text{O (2673, 1162; 2770) calc.} \end{array}$$

Les valeurs calculées à partir de la F. P. ne s'écartent pas de plus de 1,5 % des fréquences expérimentales, et cependant la F. P. utilisée diffère très sensiblement de la F. P. quadratique exacte de D. D., en particulier même par le signe du terme de couplage.

2) Si, au contraire, on avait calculé d'abord la correction d'anharmonicité à apporter aux hautes fréquences CH, selon la méthode de C. M. ⁽²⁾ pour C₂H₄, on aurait obtenu les valeurs entre crochets,

d'où l'on aurait déduit la F. P. ci-jointe, qui

$$\begin{bmatrix} 4,2756 & + 1,0625 & | & 0 \\ + 1,0625 & 0,9960 & & 0 \\ 0 & 0 & | & 4,2629 \end{bmatrix} \begin{matrix} \text{H}_2\text{O} [3965, 1595; 3936] \\ \text{D}_2\text{O} [2829, 1179; 2884] \end{matrix}$$

diffère appréciablement de celle de D. D. Ces résultats confirment ceux obtenus pour C_2H_4 . Mais dans le cas de H_2O , il y a plus, car la connaissance des termes supérieurs de la F. P. permet de suivre de façon particulièrement claire le changement progressif des fréquences calculées à mesure que la F. P. devient plus complète.

Fréquences calculées en cm^{-1}

N°	Matrice F. P.	H_2O	D_2O
I	$\begin{bmatrix} 4,1625 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$	3832,0	2771,0
II	$\begin{bmatrix} 4,1625 & 0 \\ 0 & 0,76814 \end{bmatrix}$	3833,1667	2775,1215
III	$\begin{bmatrix} 4,1625 & +0,25235 \\ 0,25235 & 0,76814 \end{bmatrix}$	3825,1654	2758,1210
IV	F. P. (III) + termes cubiques et biquadr. selon D.D.	3650,1595	2666,1179

Les fréquences calculées en IV sont identiques aux données expérimentales anharmoniques. La différence avec les valeurs calculées à partir de la partie quadratique exacte mais incomplète III de la F. P. totale est de 2,5 % à 4,7 %.

On voit combien l'influence du terme d'interaction dans l'énergie potentielle est inférieure à celle des termes anharmoniques cubiques et biquadratiques.

D'autre part, pour juger de la valeur des F. P. obtenues par C. et al. et C. M., il faut comparer les résultats de III avec ceux de ⁽²⁾. On observe encore de fortes différences, non seulement sur la constante d'interaction, mais aussi sur le paramètre diagonal de la vibration de basse fréquence. Cette remarque rejoint celle déjà faite à propos de C_2H_4 (B_{2u}).

4. CONCLUSION.

(i) La présence d'atomes d'hydrogène dans une molécule entraînant une anharmonicité importante dans les vibrations liées au mouvement du radical CH, OH ou NH, la recherche d'une seule F. P. quadratique très précise apparaît illusoire, si l'on est dans l'ignorance des termes de degré supérieur de la F. P. C'est le cas tout particulièrement pour les petites constantes non diagonales de la F. P. quadratique qui sont, en quelque sorte noyées, sous l'influence des termes (diagonaux) de degré supérieur inconnus. Les constantes diagonales peuvent aussi être affectées, de façon moindre.

(ii) Il s'ensuit que la méthode, à première vue séduisante, consistant à reporter l'essentiel de la correction d'harmonicité sur la plus haute fréquence (3000 cm^{-1}) ⁽²⁾ ⁽³⁾ en vue de produire une F. P. quadratique dégagée de l'anharmonicité, est fallacieuse. Nous lui préférons encore l'ancienne méthode donnant une F. P. moyenne, incluant de façon inconnue les effets de l'anharmonicité. Une telle fonction est naturellement toujours approximative et n'est pas unique.

(iii) Le critère consistant à recalculer les fréquences à partir de la F. P., disons à 1 % près, bien que nécessaire, n'est pas suffisant pour garantir la valeur physique d'une F. P.

(iv) Il y a lieu de tenir compte des remarques précédentes sur la signification physique douteuse de petites constantes d'interaction liées à la présence d'atomes d'hydrogène dans la molécule lorsqu'on discute certains problèmes de théorie des liaisons chimiques. Mais, d'autres interactions, relativement importantes, comme chez CO_2 p. ex. ⁽⁹⁾ ou à l'intérieur du noyau benzénique ⁽⁴⁾ ne sauraient être mises en doute. Toutefois leur valeur numérique précise peut être sensiblement influencée par le voisinage d'un radical CH. Tel peut être le cas chez C_6H_6 et beaucoup plus chez C_2H_4 pour l'interaction de CC sur CH et l'angle CH_2 .

Les auteurs désirent remercier le Centre National belge de Chimie Physique moléculaire pour son assistance.

APPENDICE

L'énergie potentielle U de la molécule d'éthylène s'écrit pour chacune des familles B_{2u} , B_{1g} , B_{3u}

$$2\Psi = a\xi^2 + 2\alpha \cdot \xi\eta + b\eta^2$$

où ξ désigne dans chaque cas le double de l'extension Δl de la distance $l = \text{CH}$ et η , dans les deux premiers cas, le double de $l\Delta\beta$ ($\beta = \text{angle CCH}$) et dans le dernier cas $l\Delta\alpha$ ($\alpha = \text{angle HCH}$), sans facteur 2. Comparant avec les notations

de M.C.⁽²⁾, on a respectivement pour a les valeurs 4K, 4Q, 4I; pour b on a 4L, 4R, 4H; pour x on a 4N, 4S, 4J.^(*)

On sait ⁽⁶⁾ que l'on a pour l'équation séculaire donnant les fréquences de vibration le déterminant

$$|G \cdot U - I \cdot \lambda| = 0$$

où G représente la matrice de Wilson, U la matrice de l'énergie potentielle et I la matrice diagonale unité. En adoptant les unités précédemment définies, on a $\lambda = (\nu / 1303,06)^2$ où la fréquence ν est exprimée en cm^{-1} . Développant les matrices, on obtient (λ' , λ'' racines)

$$G = \begin{bmatrix} A & X \\ X & B \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} a & x \\ x & b \end{bmatrix}$$

$$S = Aa + 2Xx + Bb$$

$$S = \lambda' + \lambda''$$

$$p = (AB - X^2) (ab - x^2) = |G| \cdot |U|$$

$$p = \lambda' \lambda''$$

séparément pour chaque famille de C_2H_4 et C_2D_4 . On remarque

(i) dans l'hypothèse de l'anharmonicité, on devrait avoir la même valeur commune $ab - x^2$ pour le rapport $p : |G|$ chez C_2H_4 et chez C_2D_4 . C'est la règle du « produit isotopique » de Redlich-Teller.

(ii) dans la même hypothèse, on obtiendrait exactement pour chacun des trois cas considérés

$$S_H - S_D = 0,49559 (a + b)$$

ce qui correspond à la « sum rule » bien connue de DECIUS et WILSON ⁽¹⁰⁾, ⁽¹¹⁾. On voit bien pourquoi la « sum rule », si précieuse pour la vérification des calculs numériques, peut néanmoins devenir illusoire pour la détermination d'une F . P . précise. En effet, les hautes fréquences, intervenant par leurs carrés dans S , sont précisément fort affectées par une correction d'anharmonicité et ensuite, c'est la différence de deux valeurs incertaines qui sert au calcul de $a + b$. Cela s'observe très bien chez H_2O .

(iii) On a pu observer sur les exemples donnés plus haut la forte croissance de b avec x , a étant beaucoup moins affecté. Ce résultat se déduit de l'équation

$$b - x^2/a = p/|G|a = \text{const}/a.$$

REFERENCES

1. DARLING, B. T. and DENNISON, D. M. *Phys. Rev.* 57, 128 (1940).
2. CHARETTE, J. et MANNEBACK, C. *Ann. Soc. Sci. Bruxelles*, (I) 66, 178 (1952).
3. CRAWFORD, B. L. LANCASTER, J. E. and INSKEEP, R. G., *Jour. Chem. Phys.* 21, 678 (1953).
4. BERNARD, E., MANNEBACK, C., et VERLEYSEN, A., *Ann. Soc. Sci. Brux.* (I) 59, 376 (1939) 60, 45 (1940).
5. MANNEBACK, C. et RAHMAN, A. *Ann. Soc. Sci. Brux.* (I) 67, 28 (1953).
6. WILSON, E. B., *Jour. Chem. Phys.*, 7, 1047 (1939), 9, 76, (1941).
7. de HEMPTINNE, M. et MANNEBACK, C., *Proc. Indian Acad. Sc.*, 9, 286 (1939).
8. MANNEBACK, C., *Ann. Soc. Sci. Brux.* (B) 55, 237 (1935).
9. DENNISON, D. M., *Rev. Mod. Phys.*, 12, 175 (1940).
10. COULSON, C. A., DUCHESNE, J., MANNEBACK, C. Volume commémoratif Victor Henri. 1947-48.
11. DECIUS, J. C., WILSON, E. B., *Jour. Chem. Phys.*, 19, 1409 (1951).
12. DECIUS, J. C., *Jour. Chem. Phys.*, 20, 511 (1952).

Institut de Physique de l'Université
Louvain, octobre 1953.

(*) A signaler une erreur d'impression chez M. C. ⁽²⁾, p. 191. Au lieu de $2S = -0,11790$, lire $2S = -0,23583$.

Spectre Infra Rouge à grande dispersion de $\text{CH}_2=\text{CHD}$

PAR

C. COURTOY

(Faculté des Sciences de Namur)

et

M. de HEMPTINNE

(Université de Louvain)

— — —

SOMMAIRE — Le spectre d'absorption du $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$ dans la région s'étendant de 4020 cm^{-1} à 4785 cm^{-1} est donné. Certaines bandes peuvent être interprétées comme correspondant à des raies de combinaison ou à des harmoniques déterminées. Il en résulte que certaines constantes d'anharmonicité ont pu être mesurées.

INTRODUCTION

Dans une note précédente, nous avons donné le détail du spectre d'absorption IR à grande dispersion de la molécule $\text{CH}_2=\text{CHD}$ depuis 700 cm^{-1} jusqu'à 3210 cm^{-1} . Certaines parties du spectre avaient toutefois échappé à l'examen; en effet, l'absorption de la vapeur d'eau atmosphérique et du CO_2 rendait des mesures précises difficiles dans plusieurs régions du spectre. Il avait cependant été possible d'enregistrer presque toutes les bandes ou tout au moins les maxima d'absorption des bandes correspondant aux fréquences propres de la molécule. La bande $\text{C}=\text{C}$ située à 1606 cm^{-1} et le centre de la bande située vers 725 cm^{-1} n'avaient pu être enregistrés. On avait également pu mettre en évidence un certain nombre de bandes qui étaient à imputer à des raies de combinaisons; nous avons passé ces bandes sous silence. Nous nous proposons de les discuter ici. De plus nous donnons en détail le spectre de la région comprise entre 4020 cm^{-1} et 4785 cm^{-1} . Il faut s'attendre à observer dans cette région de nombreuses raies de combinaison, aussi doit-on craindre que le spectre présente un aspect tourmenté. C'est effectivement ce qui se produit. L'analyse complète des bandes est

de ce fait rendue très difficile. Il est cependant parfois possible de déterminer avec exactitude le centre des bandes et même dans certains cas d'analyser la bande elle-même. Nous considérons qu'il ne s'agit dans cette note que d'une première tentative d'explication qui devra être complétée ultérieurement par l'étude des autres régions spectrales.

Les spectres ont été obtenus au moyen du spectrographe IR monté par Mr Migeotte à l'Université de Liège, il était installé à l'époque à la station scientifique du Jungfraujoch.

Nous avons utilisé le 2^e ordre d'un réseau ayant 7500 traits par pouce. Le tube d'absorption avait un parcours de un mètre.

2. RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Pour les régions comprises respectivement de 2020cm^{-1} à 3130cm^{-1} et de 2840cm^{-1} à 2920cm^{-1} , les fréquences, réduites au vide, des raies d'absorption ont été publiées dans la note précédente (¹). Trois bandes intenses apparaissent, elles ont leur centre à 2072cm^{-1} , 2124cm^{-1} et 2885cm^{-1} .

Les fréquences, réduites au vide, des raies de la région qui s'étend de 4026cm^{-1} à 2784cm^{-1} sont inscrites en regard des raies d'absorption sur les planches qui reproduisent le spectre.

On voit très nettement que certaines bandes dont on peut mesurer le centre et même déterminer le type se détachent de l'ensemble des raies qui rendent cette région si confuse. Nous voyons ainsi qu'entre 4030cm^{-1} et 4077cm^{-1} il apparaît une bande qui présente une structure semblable à celle que présenterait une vibration perpendiculaire d'une toupie symétrique.

On observe deux maxima détachés, l'un à $4211,9$ et l'autre à $4218,8$, mais il est impossible d'affirmer qu'il s'agit de bandes centrales ou au contraire de bandes appartenant à une bande unique de centre indéterminé.

Un maximum central net mais peu intense apparaît à $4248,8\text{cm}^{-1}$, de part et d'autre on observe également des bandes à maxima nets.

Un autre maximum d'absorption apparaît à $4337,8\text{cm}^{-1}$. A une certaine distance de là, vers les fréquences croissantes, on observe une bande de type A ayant son centre à 4382cm^{-1} . Nous observons encore un maximum peu prononcé à $4491,2\text{cm}^{-1}$ et un autre très faible à $4551,4\text{cm}^{-1}$. Nous pouvons enfin distinguer encore deux bandes bien nettes qui paraissent être principalement de type A,

l'une ayant son centre à $4560,2 \text{ cm}^{-1}$, l'autre ayant son centre à $4620,5 \text{ cm}^{-1}$, et une bande de type B pur présentant un minimum d'absorption caractéristique vers $4700,7 \text{ cm}^{-1}$.

3. — QUELQUES CONSIDÉRATIONS SUR LES FRÉQUENCES DE COMBINAISON ET LES HARMONIQUES.

Quand on part du niveau de vibration le plus bas, les fréquences de combinaison et les harmoniques du type $v_i + v_k$ sont données par la formule suivante (2)

$$G(v_1, v_2, \dots) - G(0, 0, \dots) = \sum_i \omega_i \left(v_i + \frac{1}{2} \right) + \sum_i \sum_{k \geq i} x_{ik} \left(v_i + \frac{1}{2} \right) \left(v_k + \frac{1}{2} \right) - \left\{ \sum_i \frac{\omega_i}{2} + \sum_i \sum_{k \geq i} \frac{1}{4} x_{ik} \right\}$$

dans cette formule les v_i et v_k prennent des valeurs entières ou la valeur 0 suivant la combinaison ou l'harmonique envisagée, les x_{ik} sont les corrections d'anharmonicité.

L'analyse détaillée des spectres du CO_2 et de H_2O montre que les corrections sont relativement petites. L'ordre de grandeur maximum des x_{ik} semble devoir être aux environs de 20 à 25 cm^{-1} , la plupart d'entre eux seront cependant beaucoup plus petits, leur valeur peut n'être que de quelques dixièmes de cm^{-1} voire même tout à fait négligeable. Si les x_{ii} sont généralement négatifs, il n'en est pas de même des x_{ik} avec $i \neq k$, qui peuvent être positifs ou négatifs suivant les cas.

L'expérience ne nous donne pas directement ω_i mais bien v_i qui subit déjà l'influence de l'anharmonicité. Ceci est heureux pour la détermination expérimentale des constantes d'anharmonicité; en effet, nous pouvons écrire pour les fréquences harmoniques :

$$\begin{aligned} v_{v_i=1} &= G_{v_i=1}(0, 0, v_i, \dots) - G(0, 0, \dots) = \omega_i + 2x_{11} + \sum_{k \neq 1} \frac{1}{2} x_{1k} \\ v_{v_i=1} &= G_{v_i=2}(0, 0, v_i, \dots) - G(0, 0, \dots) = 2 \left(\omega_i + 2x_{11} + \sum_{k \neq 1} \frac{1}{2} x_{1k} \right) + 2x_{11} \\ &= 2v_{v_i=1} + 2x_{11} \end{aligned}$$

pour les fréquences de combinaison

$$v_{ik} = v_i + v_k + x_{ik}$$

La détermination expérimentale des fréquences de combinaison de ce type permettra de trouver x_{ik} , celle des fréquences harmoniques nous donnera les x_{ii} . Nous voyons que les fréquences de combinaison peuvent être légèrement supérieures ou peuvent être inférieures à la somme des fréquences propres expérimentales correspondantes suivant que x_{ik} sera positif ou négatif.

4. ATTRIBUTIONS PROPOSÉES.

S'il n'y avait pas de correction d'anharmonicité les fréquences de combinaison et les harmoniques de vibrations fondamentales seraient obtenues sans difficulté en faisant simplement la somme des fréquences envisagées. Le tableau ci-contre donne ces valeurs. Puisque en fait les corrections d'anharmonicité existent nous devons nous attendre à trouver les raies expérimentales non pas aux fréquences indiquées dans le tableau mais bien au voisinage de ces fréquences; l'écart entre la valeur expérimentale et celle du tableau nous donnant la valeur du x_{ik} correspondant.

Par ailleurs il est possible que des dédoublements Fermi produisent des déplacements importants de bandes d'absorption, comme c'est le cas pour la vibration fondamentale située vraisemblablement à 3002 cm^{-1} .

TABLEAU I

	730	807	943	1000	1128	1289	1401	1604	2276	3002	3061	3103
730	1460	1537	1673	1730	1858	2019	2131	2334	3006	3732	3791	3833
807		1614	1750	1807	1935	2096	2208	2411	3083	3809	3868	3910
943			1886	1943	2071	2232	2344	2547	3219	3945	4004	4046
1000				2000	2128	2289	2401	2604	3276	4002	4061	4103
1128					2256	2417	2529	2732	3404	4130	4189	4231
1289						2578	2690	2893	3565	4291	4350	4392
1401							2802	3005	3677	4402	4462	4504
1604								3208	3880	4606	4665	4707
2276									4552	5278	5337	5379
3002										6004	6063	6105
3061											6122	6164
3103												6206

Il n'est peut-être pas sans intérêt de faire remarquer que l'on retrouve le plus souvent dans le spectre d'absorption de la molécule $\text{HDC} = \text{CD}_2$ les bandes correspondant aux bandes de combi-

naison présentes dans le spectre d'absorption de la molécule $\text{H}_2\text{C} = \text{CHD}$, en tenant compte bien entendu de ce que les D dans la molécule $\text{C}_2\text{H}_3\text{D}$ jouent le rôle des H dans la molécule $\text{C}_2\text{H}_2\text{D}$ et vice versa.

Malheureusement la plupart des mesures dont nous disposons pour $\text{C}_2\text{D}_3\text{H}$ dans la région qui nous intéresse ont été prises à dispersion faible, ce qui ne permet pas de comparer entre elles les constantes d'anharmonicité.

1) La bande dont le maximum d'absorption se situe à 2072 cm^{-1} ne peut selon nous être attribuée qu'à la fréquence de combinaison $1128 + 943 = 2071$, entre la vibration gauche 943 et la vibration plane 1128, faisant ressortir que le x_{ik} correspondant à cette combinaison est de l'ordre de 1 cm^{-1} , donc très petit. Si notre interprétation est correcte la bande doit présenter un certain caractère C, ce qui semble bien être le cas.

Pour la molécule $\text{C}_2\text{D}_3\text{H}$, nous trouvons une raie à 1918, attribuée à la combinaison $995 + 918 = 1914$.

2) La bande dont le centre se trouve à 2124 cm^{-1} peut être attribuée à la combinaison $1128 + 1000 = 2128$, entre la vibration gauche 1000 et la plane 1128, donnant une correction d'anharmonicité x_{ik} négative de 4 cm^{-1} , ce qui est convenable. La bande présente sans aucun doute possible au moins partiellement le caractère C.

3) La bande ayant un maximum d'absorption à 2885 cm^{-1} est d'un type A assez prononcé sans pour cela être pur, nous attribuons cette bande à la combinaison $1289 + 1604 = 2893$; la différence de 8 cm^{-1} est grande mais reste dans un ordre de grandeur acceptable pour le x_{ik} envisagé, qui serait négatif.

La structure fine donne un espacement de $1,67\text{ cm}^{-1}$ entre raies.

L'analyse des raies de rotation de la bande nous conduit à la formule :

$$\nu = 2884,26 \pm 1,67 J$$

La confrontation entre expérience et théorie est donnée dans le tableau suivant (pour la numérotation des raies nous renvoyons à la page 106 du travail précédent ⁽¹⁾).

TABLEAU II
Bande 2884,26

J	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)	N°	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)	N°
0						
1				2885,93		
2	2880,92	2880,79	(19)	2887,60	2887,19	21
3	2879,25	2879,23	18	2889,27	2889,05	22
4	2877,58	2877,56	17	2890,94	2890,76	23
5	2875,91	2875,99	16	2892,61	2892,74	24
6	2874,24	2874,32	15	2894,28	2894,53	25
7	2872,57	2872,78	14	2895,95	2896,33	26
8	2870,90	2871,29	13	2897,62	2897,78	27
9	2869,23	2869,72	12	2899,29	2999,32	28
10	2867,56	2868,03	11	2900,96	2900,91	29
11	2865,89	2866,39	10	2902,63	2903,51	30
12	2864,22	2865,03	9	2904,30	2904,94	31
13	2862,55	2863,28	8	2905,97	2906,40	32
14	2860,88	2861,51	7	2907,64	2907,98	33
15	2859,21	2858,93	6	2909,31	2909,82	34
16	2857,54	2857,70	5	2910,98	2911,09	35
17	2855,87	2855,74	4	2912,65	2913,01	36
18	2854,20	2853,98	3	2914,32	2914,54	37
19	2852,53	2852,25	2	2915,99	2916,34	38

Pour la molécule C_2HD_3 , nous trouvons une raie à 2592, attribuée à $1046 + 1547 = 2593$.

4) La bande qui s'étend de 4040 cm^{-1} environ à 4080 cm^{-1} présente des maxima régulièrement espacés, qui sont sans aucun doute des branches Q. On les retrouve très sensiblement en appliquant la formule

$$\nu = 4061,26 \pm 2,595 (2 \text{ K} \pm 1)$$

ce qui ferait supposer que la bande correspond à la fréquence de combinaison $3061 + 1000 = 4061$, avec une correction d'anharmonicité négligeable. La fréquence 1000 cm^{-1} étant une fréquence gauche, la bande devrait présenter un maximum central. Comme celui-ci devrait précisément se trouver à l'endroit même où se trouve une raie d'absorption de la vapeur d'eau, il nous est difficile de nous prononcer définitivement.

Remarque : L'espacement entre maxima est notablement plus petit que l'espacement trouvé précédemment pour les fréquences propres de la molécule envisagée. Il est en effet égal à 3,11 pour la bande de $1000,15 \text{ cm}^{-1}$, alors qu'ici il est de 2,59.

La comparaison entre valeurs expérimentales et théoriques sont données dans le tableau III.

TABLEAU III
Bande 4061,26

K	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)
0	4058,66	4058,43	4063,85	4063,83
1	4053,47	4053,22	4069,04	4069,04
2	4048,28	4048,29	4074,23	4074,24
3	4043,09		4079,42	
4				
5				

5) La fréquence de combinaison $3096 + 1128 = 4224$ pourrait se manifester par une bande dont le maximum central serait à 4222,5, donnant une anharmonicité négative de $1,5 \text{ cm}^{-1}$ ($x_{ik} = -1,5 \text{ cm}^{-1}$).

6) La bande dont le maximum d'absorption se trouve à 4337,8 pourrait être attribuée à la fréquence de combinaison $3061 + 1289 = 4350$, ce qui donnerait un x_{ij} négatif égal à $12,18 \text{ cm}^{-1}$. Pour $\text{C}_2\text{D}_3\text{H}$, nous trouvons 3328, attribué à $2281 + 1047 = 3328$.

7) La bande 4382 apparaît comme étant principalement de caractère A; nous proposons de l'attribuer à la combinaison $3096 + 1289 = 4385$, moins une anharmonicité de 3 cm^{-1} environ.

Pour $\text{C}_2\text{D}_3\text{H}$, nous trouvons 3371, attribué à $2332 + 1047 = 3378$.

8) La bande $4491,2 \text{ cm}^{-1}$ pourrait être attribuée à la combinaison $3096 + 1401 = 4797$, moins une anharmonicité de 6 cm^{-1} .

Pour $\text{C}_2\text{D}_3\text{H}$, nous trouvons 3328, attribué à $2332 + 997 = 3329$.

9) La bande faible qui se marque à 4551,4 pourrait être due à la combinaison $2276 + 1289 + 1000 = 4515$.

10) Les bandes $4560,2 \text{ cm}^{-1}$ et $4620,5 \text{ cm}^{-1}$ peuvent s'interpréter, pensons-nous, comme le dédoublement Fermi d'une raie située à 4590 cm^{-1} qui proviendrait de la combinaison $1604 + 3002 = 4606$,

et de la combinaison $1604 + 1401 + 1604 = 4609$. Rappelons que la raie 3002 est elle-même dédoublée ⁽³⁾.

Si on admet notre interprétation, la correction d'anharmonicité pour la combinaison en question serait de $4608 - 4590 = -18 \text{ cm}^{-1}$, ce qui est un ordre de grandeur convenable.

11) On observe une bande très nette de type B presque pur ayant son centre à 4700,7; nous l'attribuons à $3096 + 1606 = 4702$. Les branches Q peuvent se retrouver assez bien, comme l'indique le tableau 2, en utilisant les formules suivantes, ce qui fixe le centre de la bande.

$$P_Q(K) = 4700,72 - 3,16 (2K - 1) - 0,02 K^2$$

$$P_Q(K) = 4700,72 + 3,16 (2K + 1) - 0,02 K^2$$

La comparaison entre valeurs expérimentales et théoriques sont données dans le tableau suivant.

TABLEAU IV
Bande 4700,72

K	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)	ν_{calc}	ν_{exp} (vide)
0	4703,88		4697,56	
1	4710,18	4709,06	4691,22	4692,52
2	4716,64	4716,75	4684,84	4684,80
3	4722,52	4722,75	4678,42	4678,42
4	4728,84	4729,00	4671,96	4671,95
5	4734,98	4734,93	4665,46	4665,26
6	4741,08	4741,15	4658,92	4658,65
7	4747,14	4747,36	4652,34	4652,50
8	4753,16	4753,35	4645,72	4645,78

Nous tenons en terminant à remercier tout spécialement le Professeur Migeotte qui nous a permis d'utiliser le spectrographe à réseau de l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège; ce qui a rendu ce travail possible. Nous remercions aussi la F. N. R. S. et le centre National de chimie physique moléculaire de l'aide qu'ils nous ont accordée.

BIBLIOGRAPHIE

1. C. COURTOY et M. de HEMPTINNE, *Ann. Soc. Scient. Brux.* 66, Série I p. 82 (1952).
2. G. HERZBERG, *Infrared and Raman Spectra of Polyatomic Molecules.*
3. J. CHARETTE et M. de HEMPTINNE, *Bul. Acad. Roy. Belgique*, XXXVII, p. 436 (1951).

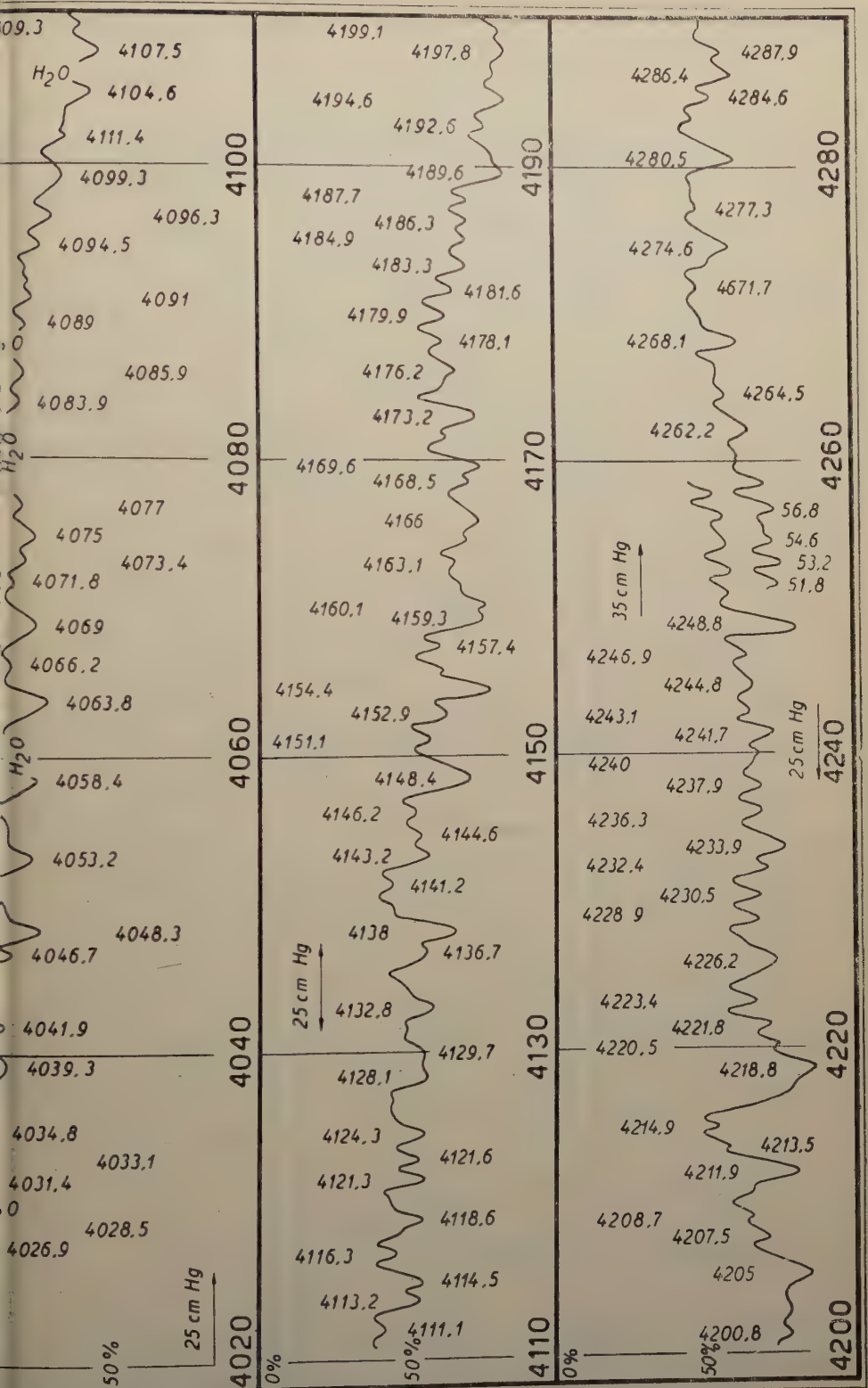
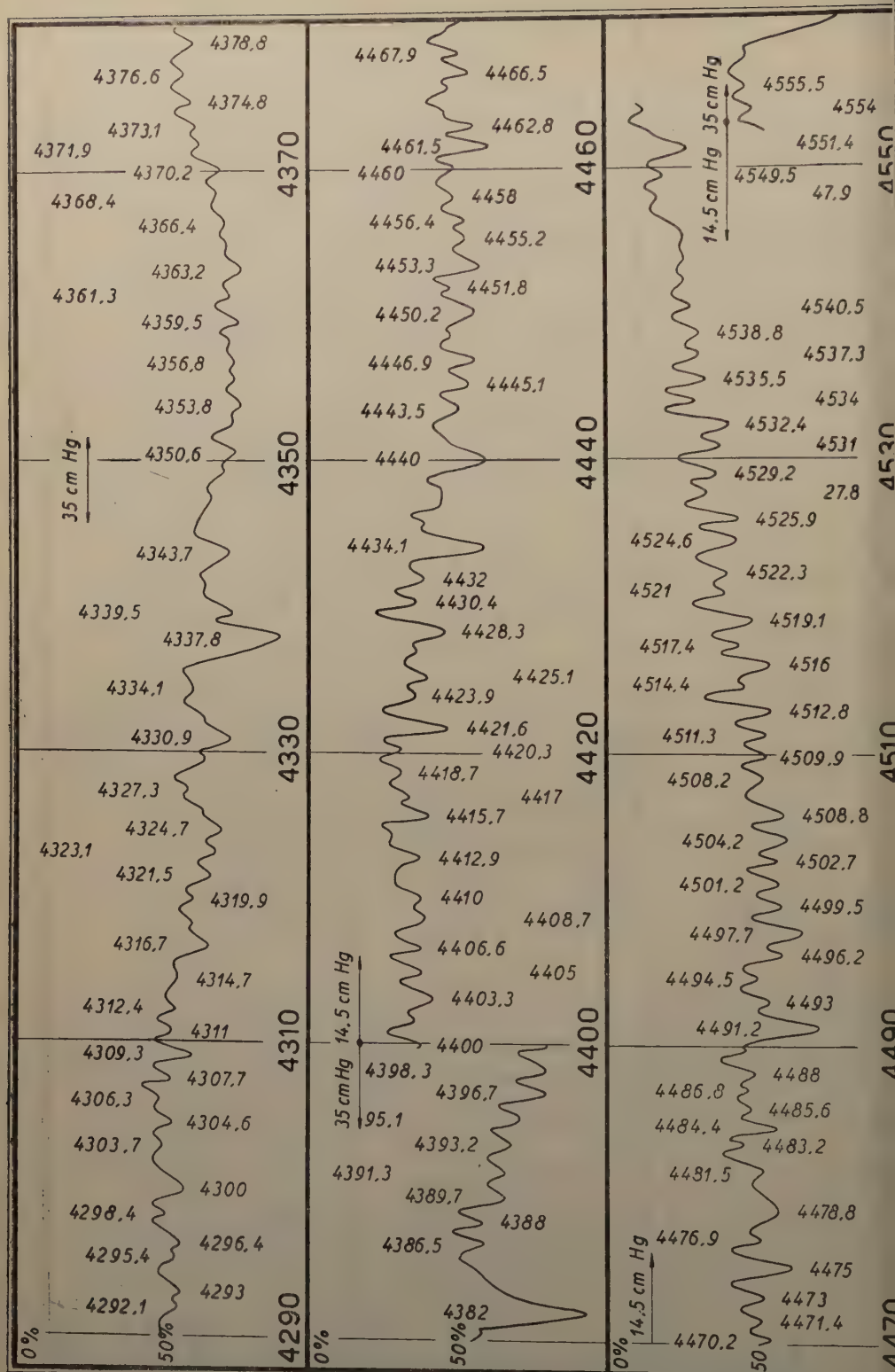


Fig. 1



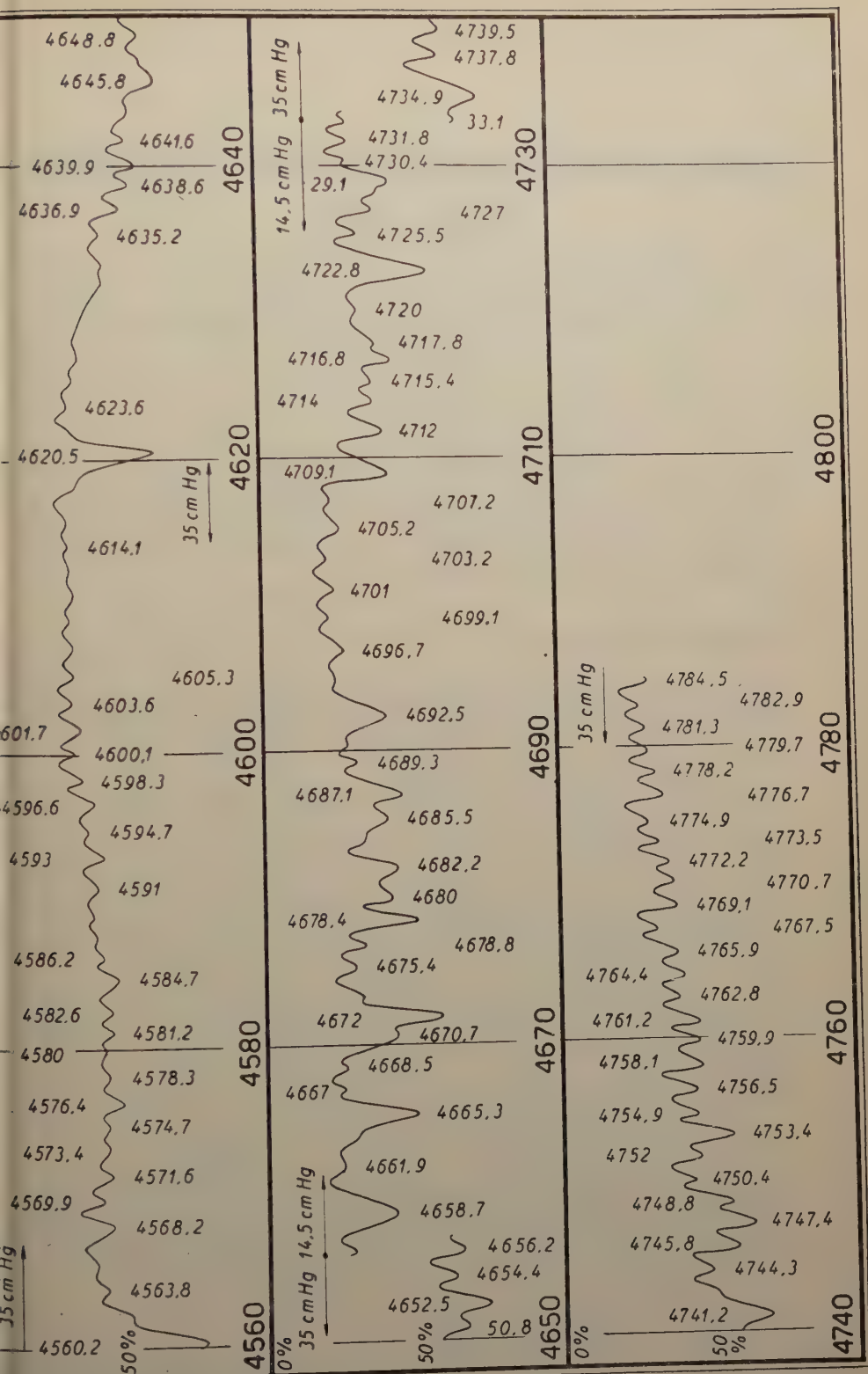


Fig. 3

Spectre infrarouge à grande dispersion de la molécule $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$

PAR

R. VAN RIET, C. COURTOY et M. de HEMPTINNE

RÉSUMÉ — Le spectre d'absorption infrarouge à grande dispersion de la molécule $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ est analysé dans les principales régions de l'intervalle 900 à 3000 cm^{-1} . Le spectre est reproduit sous forme de planches et les fréquences réduites au vide sont portées en regard des maxima d'absorption. Les espacements des raies de rotation de quelques bandes sont comparés aux valeurs que l'on déduit des moments d'inertie.

TECHNIQUE EXPÉRIMENTALE.

Le spectre infrarouge de $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ à grande dispersion a été obtenu au moyen du spectrographe à réseau monté par le Professeur Migeotte à l'Institut d'Astrophysique de l'Université de Liège. ⁽¹⁾

Une première série d'enregistrements a été faite au Laboratoire de Physique moléculaire de l'Université de Louvain au moyen d'un spectrographe à prisme (de la firme Perkin Elmer) donnant une dispersion moyenne. Ces enregistrements ont été publiés récemment ⁽²⁾.

Les parties les plus intéressantes du spectre de $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ ont ensuite été étudiées au réseau de 960 à 980 cm^{-1} , de 1040 à 1200 cm^{-1} , de 2115 à 2260 cm^{-1} et de 2920 à 3000 cm^{-1} .

La cuve d'absorption utilisée avait 15 cm de long et était munie de fenêtres en NaCl ou KBr; elle pouvait être aisément vidée pour mesurer les intensités transmises sans absorption par le gaz. Le gaz utilisé est le même que celui qui a servi à l'étude du spectre Raman de cette molécule en phase liquide et en phase vapeur ainsi qu'au spectre Raman de polarisation ⁽²⁾.

La constante du réseau a été recalculée pour chaque série d'enregistrements. Les valeurs indiquées pour les fréquences ont été toutes ramenées au vide. L'erreur admise varie suivant les régions du spectre de quelques centièmes jusqu'à un peu plus de 0,1 cm^{-1} .

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

En configuration du type « éclipse » ou en configuration du type « étoile », le $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ fournit deux isomères chimiquement inséparables.

Nous avons supposé ici, ce qui paraît le plus communément admis, que la configuration du $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ est du type « étoile ». Dans ce cas, l'un des isomères a la symétrie C_{2h} (plan de symétrie $\text{H}-\text{C}-\text{C}-\text{H}$, axe d'ordre 2 perpendiculaire à ce plan, centre de symétrie), l'autre isomère a la symétrie C_2 (axe d'ordre 2).

Les moments d'inertie ont été calculés en admettant pour les constantes géométriques les valeurs proposées par Hansen et Dennison ⁽³⁾ :

$$\text{C} - \text{C} = 1,543 \text{ \AA} \quad m_{\text{H}} = 1,008132$$

$$\text{C} - \text{H} = 1,102 \text{ \AA} \quad m_{\text{D}} = 2,014726$$

$$\widehat{\text{CCH}} = 109^\circ 37' \quad m_{\text{C}} = 12,00388$$

$$\widehat{\text{HCD}} = 109^\circ 19'$$

Les moments d'inertie et les constantes de rotation obtenus sont indiqués au tableau I

TABLEAU I

C_{2h}	C_2
10^{-40} gr/cm^2	10^{-40} gr/cm^2
$I_x = 17,614239 = I_A$ $I_z = 53,426165 = I_B$ $I_y = 56,724586 = I_C$	$I_x = 17,909898 = I_A$ $I_y = 53,729414 = I_B$ $I_z = 55,738920 = I_C$
cm^{-1}	cm^{-1}
$A = 1,588857$ $B = 0,523835$ $C = 0,493375$	$A = 1,562267$ $B = 0,520876$ $C = 0,502100$
$B + C = 1,017210$ $A - \frac{B + C}{2} = 1,080252$	$B + C = 1,022976$ $A - \frac{B + C}{2} = 1,051139$

On voit donc que pour les deux types de symétrie C_{2h} et C_2 les valeurs des constantes B et C sont peu différentes. Dans ce cas, on peut considérer, en première approximation, que la molécule $CD_2H - CD_2H$ est du type « toupie symétrique » et que le spectre infrarouge aura des bandes de type parallèle, des bandes de type perpendiculaire et des bandes de type hybride. Nous avons appliqué à quelques bandes du spectre infrarouge les formules de la toupie symétrique (4) et obtenu, comme le montrent les tableaux ci-après, un accord satisfaisant entre les raies calculées et les valeurs expérimentales (Tableaux II, III, IV, V, VI, VII et VIII).

L'analyse des différentes bandes nous a donné des valeurs expérimentales pour la constante $B+C$ et pour la constante $A - \frac{B+C}{2}$. Ces valeurs sont, pour l'état fondamental :

Bande	$B + C$	$A - \frac{B + C}{2}$
1070,16	—	1,126
1108,82	—	1,116
2145,59	0,96	—
2182,34	0,97	—
2955,15	—	1,14

Ainsi que nous l'avions déjà observé dans l'étude de la molécule $CH_2D - CH_2D$, il y a, ici également, un écart assez marqué entre les valeurs des constantes de rotation déduites des moments d'inertie et les valeurs de ces mêmes constantes déduites de la structure de rotation. Il y a cependant lieu de noter que les valeurs théoriques des constantes, telles que nous les avons évaluées, négligent les corrections de Coriolis et l'anharmonicité.

Bande à 975,90 cm^{-1} . — Nous n'avons obtenu de cette bande qu'un enregistrement partiel depuis $960\ cm^{-1}$ jusqu'au centre de la bande. La branche P de la structure de rotation paraît être de type perpendiculaire. Déjà les enregistrements pris à dispersion moyenne, au Perkin Elmer, avaient nécessité, dans la région $900\ à\ 1000\ cm^{-1}$, une pression de gaz de 48 cm en utilisant la cellule de 1 mètre de par-

cours. Il est donc normal que la cellule de 15 cm et la quantité de gaz limitée dont nous avons dû faire usage dans le travail au réseau ne nous aient pas permis d'obtenir complètement la bande centrée à $975,90 \text{ cm}^{-1}$.

Bande centrée à $1070,16 \text{ cm}^{-1}$. — De part et d'autre d'un maximum central d'absorption très intense, il y a des raies de rotation dont l'espacement correspond au type perpendiculaire. Le tableau II donne les formules par lesquelles ces raies de rotation peuvent être retrouvées ainsi que les valeurs obtenues par l'application de ces formules.

TABLEAU II
Bande centrée à $1070,16 \text{ cm}^{-1}$

$$P_Q(K) = 1070,47 - 1,121(2K - 1) - 0,005 K^2$$

$$R_Q(K) = 1070,47 + 1,121(2K + 1) - 0,005 K^2$$

P_Q			R_Q		
K	calc.	exp. (vide)	K	calc.	exp. (vide)
3	—	—	3	1078,28	1078,36
4	1062,51	1062,44	4	1080,47	1080,52
5	1059,26	1060,34	5	1082,68	1082,64
6	1057,96	1057,98	6	1084,86	1084,84
7	1055,66	1055,59	7	—	—

Bande centrée à $1108,82 \text{ cm}^{-1}$. — Comme la bande précédente, celle-ci possède également un maximum central intense. Les raies de rotation de la branche P confinent aux raies de rotation de la branche R de la bande centrée à $1070,16 \text{ cm}^{-1}$ et sont principalement de type perpendiculaire; les raies de rotation de la branche R sont d'abord de type perpendiculaire et sont prolongées à partir de 1130 cm^{-1} par des raies de rotation de type parallèle. Les formules valables pour le type perpendiculaire ont été appliquées et les résultats sont consignés au tableau III.

TABLEAU III
Bande centrée à 1108,82 cm⁻¹

$$P_Q(K) = 1109,25 - 1,119 (2K - 1) + 0,003 K^2$$

$$R_Q(K) = 1109,25 + 1,119 (2K + 1) + 0,003 K^2$$

P _Q			R _Q		
K	calc.	exp. (vide)	K	calc.	exp. (vide)
2	—	—	2	1114,85	1114,86
3	1103,69	1103,66	3	1117,01	1117,33
4	1101,57	1101,66	4	1119,37	1119,34
5	1099,25	1099,23	5	1121,63	1121,67
6	1097,05	1097,05	6	1123,91	1123,87
7	1094,85	1094,80	7	1126,18	1126,03
8	—	—	8	1128,36	1128,31

L'espacement moyen des raies de rotation de type parallèle qui s'étendent de 1129,48 cm⁻¹ à 1159,10 cm⁻¹ est de 1,06 cm⁻¹.

Région de 2115 à 2260 cm⁻¹. — Sans pouvoir nous prononcer sur le nombre de bandes distinctes contenues dans l'intervalle considéré, nous y distinguerons quatre parties.

La première va de 2117,54 cm⁻¹ jusqu'à 2140,26 cm⁻¹. Elle révèle un certain nombre de raies présentant l'espacement dû au type parallèle et deux minima plus intenses, situés respectivement à 2135,10 et 2136,89 cm⁻¹. Ces deux derniers minima pourraient être les centres de deux bandes de type parallèle. Il y a en outre à 2121,24 cm⁻¹ une raie assez intense qui pourrait être la branche Q d'une bande de type perpendiculaire.

La seconde région s'étend de 2140,26 cm⁻¹ à 2162,80 cm⁻¹. On y trouve, sans aucun doute possible, une bande de type A qui est analysée au tableau IV.

TABLEAU IV
Bande centrée à 2145,59 cm⁻¹

P (J) = 2145,39 — 0,96 J			R (J) = 2145,39 + 0,96 (J + 1)		
J	calc.	exp. (vide)	J	calc.	exp. (vide)
2	2143,47	2143,26	2	—	—
3	2142,51	2142,35	3	2149,23	2149,43
4	2141,55	2141,35	4	2150,19	2150,47
5	2140,59	2140,26	5	2151,15	2151,34
6	—	—	6	2152,11	2152,24
7	—	—	7	2153,17	2153,14
8	—	—	8	2154,03	2154,23
9	—	—	9	2154,99	2155,25

La troisième région débute à 2169,68 et finit à 2184,79 cm⁻¹. Nous y trouvons une bande dont le centre est dédoublé et dont le type principal paraît être le type parallèle. La branche R de cette bande ne comporte que deux raies de rotation tandis qu'il y en a treize pour la branche P. Le tableau V résume l'analyse de cette bande.

TABLEAU V
Bande centrée à 2182,34 cm⁻¹

P (J) = 2182,34 — 0,97 J			R (J) = 2182,34 + 0,97 (J + 1)		
J	calc.	exp. (vide)	J	calc.	exp. (vide)
0	2182,34	2182,34	0	2183,31	2183,50
1	2181,37	2181,59	1	2184,28	2184,79
2	2180,40	2180,49			
3	2179,43	2179,32			
4	2178,46	2178,48			
5	2177,49	2177,36			
6	2176,52	2176,43			
7	2175,55	2174,95			
8	2174,58	2174,24			
9	2173,61	2173,37			
10	2172,64	2172,51			
11	2171,67	2171,48			
12	2170,70	2170,55			
13	2169,73	2169,68			

La quatrième partie de la région étudiée présente deux maxima d'absorption peu intenses à 2196,64 et 2118,57 cm^{-1} ainsi qu'un minimum d'absorption à 2226,28 cm^{-1} . Ce minimum est encadré de raies de rotation d'allure irrégulière dont un certain nombre présente l'espacement caractéristique des bandes de type perpendiculaire.

Région de 2920 à 3000 cm^{-1} . — Cette région paraît comporter trois centres de bande très voisins l'un de l'autre, (à savoir 2947,80 2954,38 -- 2955,35 et 2957,38 — 2958,26) les deux derniers centres étant doubles. Une structure de rotation dont l'espacement est celui des bandes de type perpendiculaire accompagne les trois centres mentionnés. Bien que l'objet du présent travail ne comporte pas l'attribution des fréquences expérimentales aux vibrations propres des deux isomères étudiés, il est intéressant de remarquer qu'il y a effectivement trois vibrations C-H actives en infrarouge, deux pour l'isomère de symétrie C_2 et une pour l'isomère de symétrie C_{2h} .

TABLEAU VII
Bande centrée à 2954,38 — 2955,35 cm^{-1}

$P_Q (K) = 2955,15 - 1,14 (2K - 1)$			$R_Q (K) = 2955,15 + 1,14 (2K + 1)$		
K	calc.	exp. (vide)	K	calc.	exp. (vide)
1	2954,01	—	1	2958,57	—
2	2951,73	—	2	2960,85	2960,96
3	2949,45	—	3	2963,13	2963,39
4	2949,17	—	4	2965,41	2965,71
5	2944,89	2945,12	5	2967,69	2967,83
6	2942,61	2942,98	6	2969,97	2969,94
7	2940,33	2940,43	7	2972,25	2972,58
8	2938,05	2938,13	8	2974,53	2974,92
9	2935,77	2935,92	9	2976,81	2976,89
10	2933,49	2933,44	10	2979,09	2979,30
11	2931,21	2931,02	11	2981,37	2981,47
12	2928,93	2928,86	12	2983,65	2983,62
13			13	2985,93	2985,63
14 (H_2O)			14	2988,21	2987,61
15			15	2990,47	—
16			16	2992,77	2992,13
17 (H_2O)			17	2995,05	2994,65

Dans les tableaux VII et VIII nous avons indiqué deux possibilités d'interprétation des raies de rotation suivant que l'on considère qu'elles appartiennent à la bande centrée à $2957,38 - 2958,26 \text{ cm}^{-1}$ ou à la bande centrée à $2954,38 - 2955,35 \text{ cm}^{-1}$. Dans les deux cas on obtient un accord satisfaisant entre les valeurs calculées pour les raies de rotation et celles que l'on a observées expérimentalement.

TABLEAU VIII
Bande centrée à $2957,38 - 2958,26 \text{ cm}^{-1}$

$P_Q (K) = 2957,32 - 1,148 (2K - 1)$			$R_Q (K) = 2957,32 + 1,148 (2K + 1)$		
K	calc.	exp. (vide)	K	calc.	exp. (vide)
1			1	2960,76	2960,96
2			2	2963,06	2963,39
3			3	2965,35	2965,71
4			4	2967,65	2967,83
5	2946,99	2947,80	5	2969,95	2969,94
6	2944,69	2945,12	6	2972,24	2972,58
7	2942,40	2942,98	7	2974,54	2974,92
8	2940,10	2940,43	8	2976,84	2976,89
9	2937,80	2938,13	9	2979,13	2979,30
10	2935,51	2935,92	10	2981,43	2981,47
11	2933,21	2933,44	11	2983,72	2983,62
12	2930,92	2931,02	12	2986,02	2985,63
13 (H ₂ O)	2928,62	2928,86	13	2988,32	2987,61
14			14	2990,61	—
15			15	2992,91	2992,13
16 (H ₂ O)			16	2995,20	2994,65

CONCLUSIONS.

Dans ce travail nous avons voulu d'abord faire connaître les fréquences observées dans le spectre de rotation-vibration de la molécule $\text{CD}_2\text{H} - \text{CD}_2\text{H}$ en absorption infrarouge. Nous nous sommes efforcés de dégager le type des principales bandes obtenues en nous référant aux formules de la toupie symétrique. Enfin, nous avons comparé les valeurs obtenues expérimentalement pour les constantes de rotation avec celles que l'on déduit des constantes géométriques proposées par Hansen et Dennison.

En terminant, nous remercions tout spécialement le professeur M. Migeotte pour l'usage du spectrographe à réseau et l'aide constante apportée pendant la prise des spectres à la Station scientifique du Jungfraujoch et au Laboratoire d'Astrophysique de l'Université de Liège. Nous remercions la Direction et le personnel de ces institutions de l'hospitalité qui nous fut accordée dans leurs laboratoires. Nous remercions également le Centre de Chimie physique moléculaire et le F. N. R. S. pour l'aide financière qu'ils nous ont apportée. Nous disons enfin notre gratitude à G. Maes et J. Remy qui nous ont aidé au cours de ce travail.

UNIVERSITÉ DE LOUVAIN,
Laboratoire de Physique nucléaire et moléculaire.

BIBLIOGRAPHIE

- (1) M. MIGEOTTE, *Mémoires de la Société Royale des Sciences de Liège*, Coll. in 4°. Première série, Tome I Fasc. 3 (1945).
- (2) R. VAN RIET et M. de HEMPTINNE, *Bulletin Acad. Roy. Belg.* 5^{me} série, Tome XXXIX (1953).
- (3) G. E. HANSEN et E. M. DENNISON, *J. Chem. Phys.* 20, 313, (1952).
- (4) R. VAN RIET, C. COURTOY et M. de HEMPTINNE, *Ann. Soc. Scient. Brux.*, Tome LXVII, (1953).

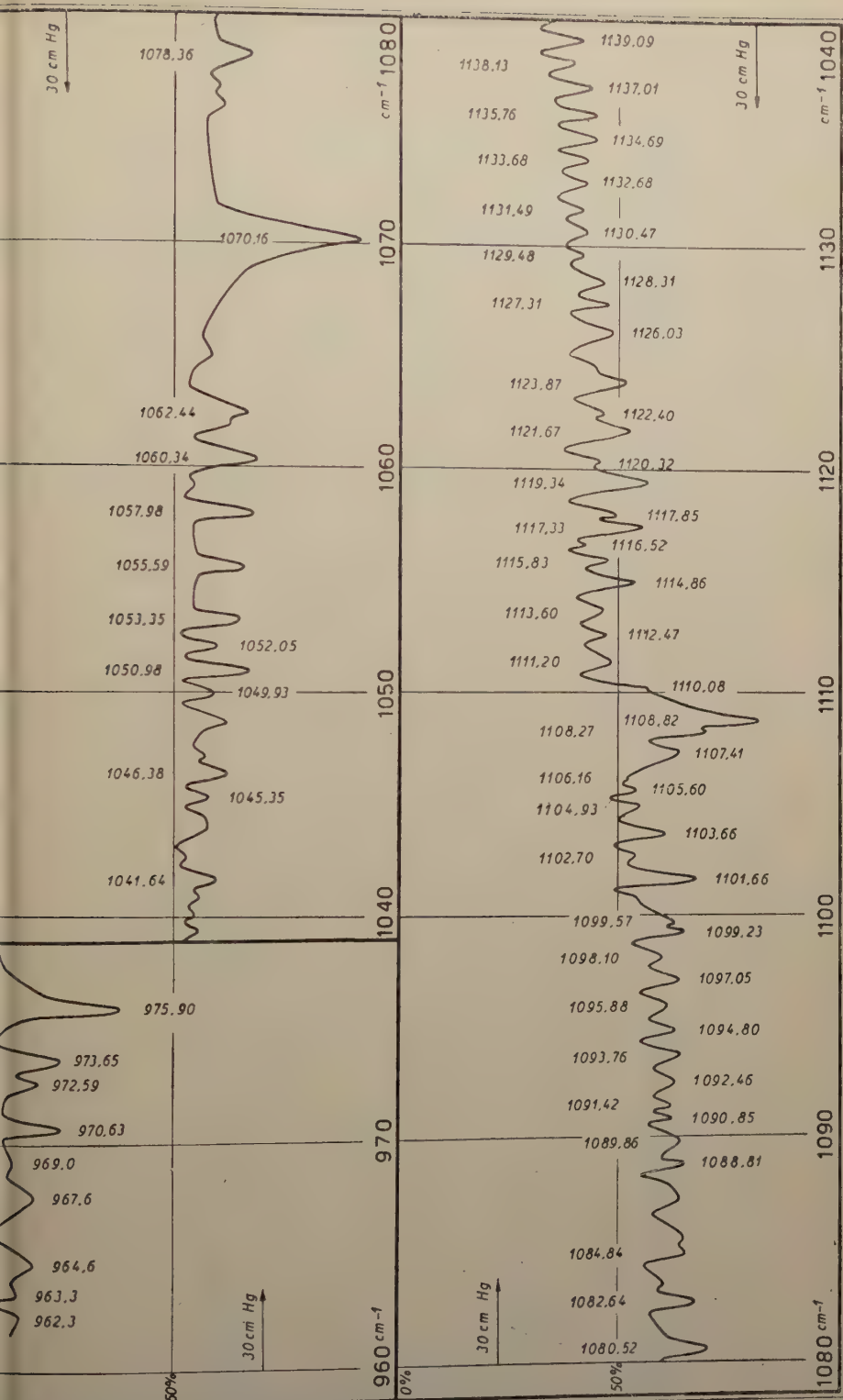


Fig. 1

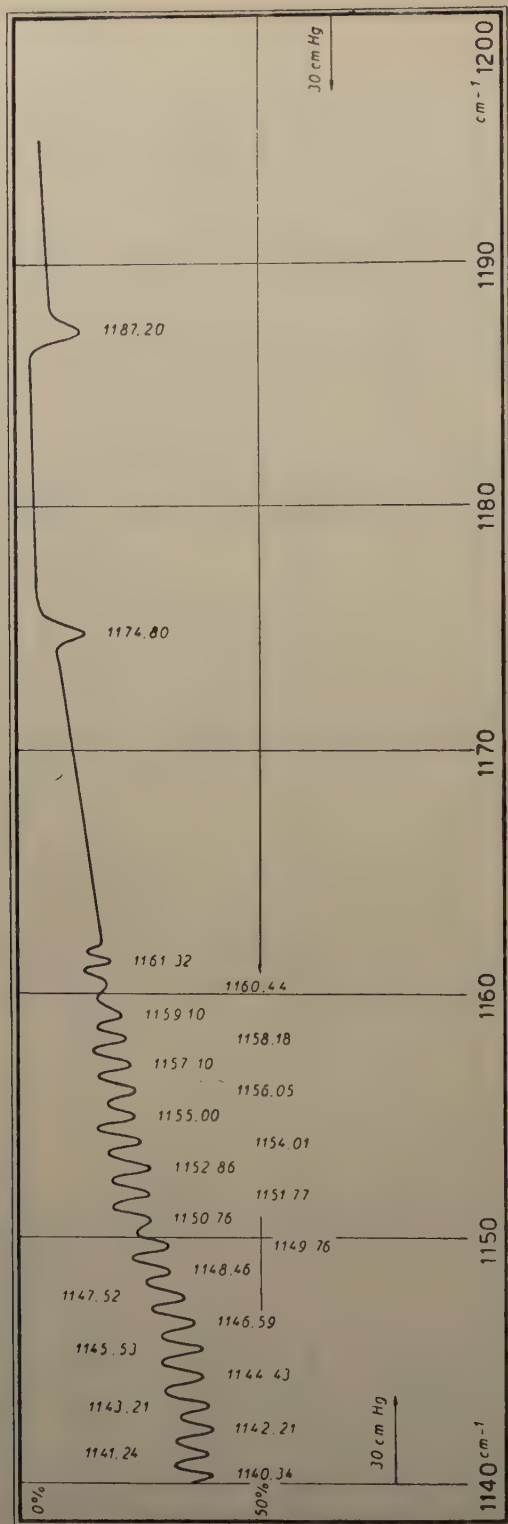


Fig. 2

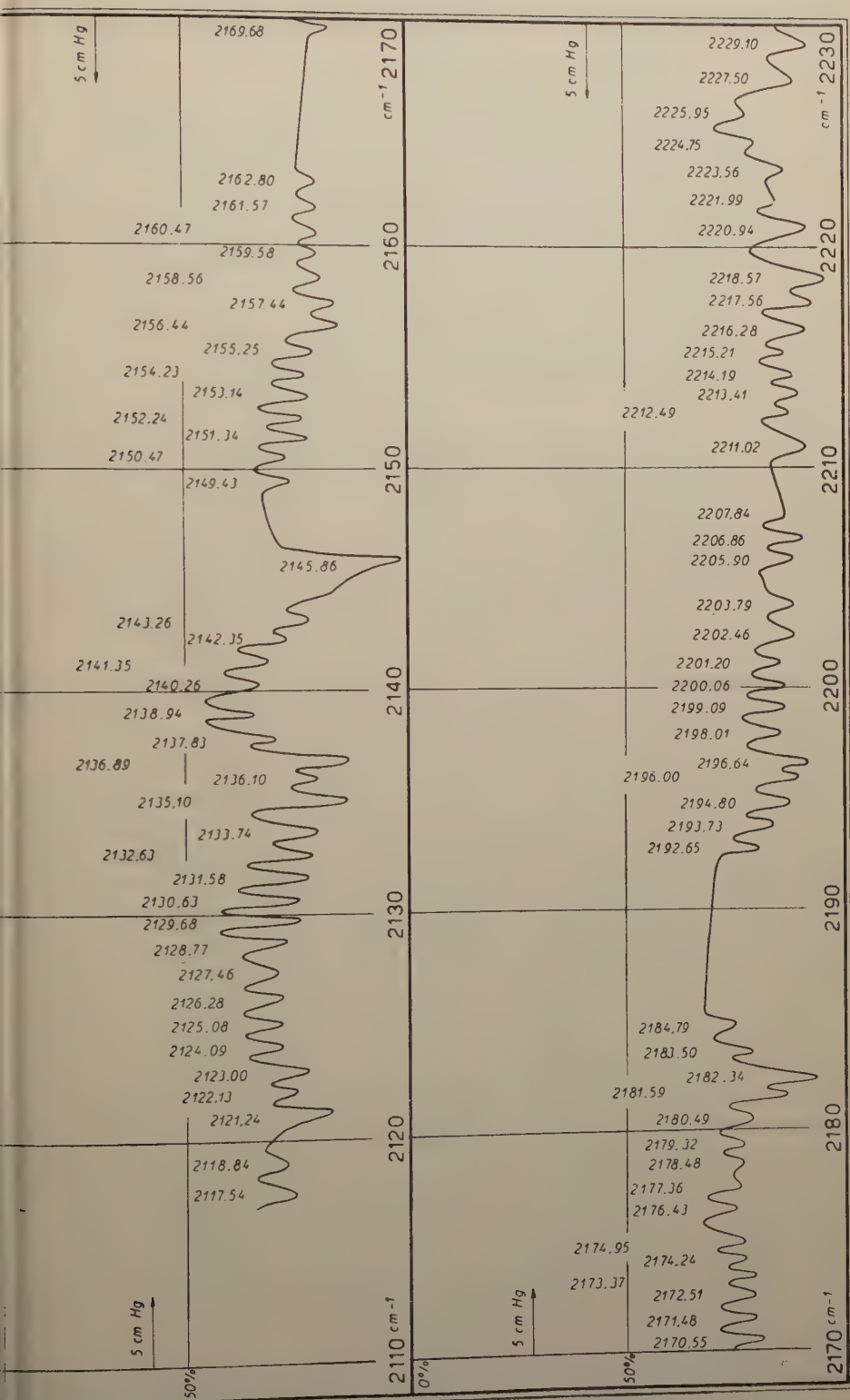
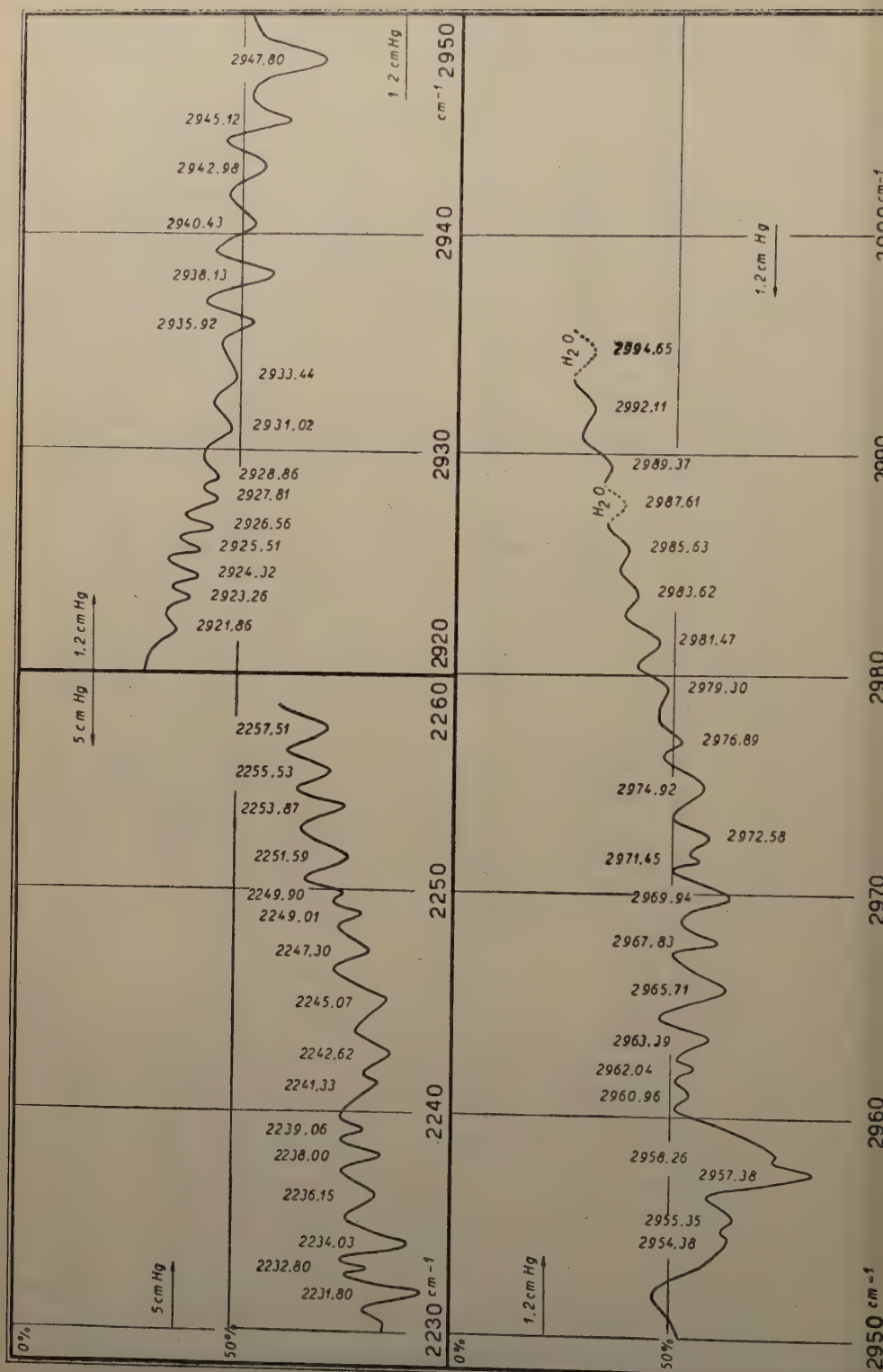


Fig. 3



Quelques résultats sur les spectres nucléaires du Rb86 et du Cs137

PAR

PIERRE MACQ

Licencié en sciences physiques
Centre de physique nucléaire de Louvain

SOMMAIRE — L'objet du travail présenté ⁽¹⁾ est l'étude expérimentale des spectres d'émission bêta et gamma du Rb86 au moyen d'un spectromètre bêta du type « lentille mince » et de la corrélation angulaire existant entre les directions des bêta et gamma émis en cascade dans la désintégration du noyau. On a, d'une manière concomitante, étudié le spectre bêta mou du Cs137.

INTRODUCTION.

Lorsqu'on a voulu étudier la structure de ce qui était considéré comme composante élémentaire de la matière — l'atome — la spectroscopie atomique s'est avérée être un des moyens d'investigation des plus puissants. Elle mettait en effet en lumière, par la structure en raies de ses résultats, l'aspect quantique qui, dans l'infiniment petit, devait se substituer aux idées de la mécanique classique. On découvrait ainsi que l'atome « vit » dans des états quantifiés stationnaires, états caractérisés par les « constantes de mouvement » énergie, moment angulaire total, parité. On exécuta alors un travail méthodique de classification et d'interprétation sur la structure et les forces en jeu dans l'édifice atomique. Le même point de vue est repris depuis la découverte de particules élémentaires dans l'étude du noyau : c'est ainsi que se développe et s'accumule pour le moment, un énorme travail expérimental d'ailleurs éclairé par plusieurs tentatives d'explication théorique dans les domaines les plus variés, tels que la radioactivité, bêta, gamma, les mésons, la structure nucléaire...

Donnant un avis personnel sur l'état actuel de la question à l'Ecole d'été de Physique Théorique (Les Houches 1953), le Professeur G. F. Chew de l'Université d'Illinois disait : « ... at least one more

empirical law must be discovered, such as a « Balmer formula », for the masses of the particles, before an important fundamental advance in the theory is likely. Therefore, I am inclined at present to look for empirical correlations in the experiments. However we must all make a great effort to keep our minds open for new and revolutionary ideas... ».

Suivant ainsi les courants modernes de recherche en physique nucléaire dans les énergies allant jusqu'à 10 à 20 MeV, nous avons exécuté et mis au point cette année, un spectromètre bêta de dispersion moyenne et de grande intensité dans le but d'étudier d'une manière systématique et aussi précise que possible, les noyaux radioactifs. Sa grande luminosité a été prévue pour des expériences futures de coïncidence et de corrélation angulaire en fonction de l'énergie de la particule bêta. Dans une première partie nous décrirons brièvement le spectromètre bêta en en donnant les caractéristiques essentielles. Dans une seconde partie, nous donnerons quelques résultats obtenus pour le Rb86 et le Cs137, permettant ainsi, avec les travaux effectués jusqu'à ce jour, une accumulation de résultats convergents, sur ces deux corps.

MÉTHODE EXPÉRIMENTALE.

Etude de l'émission bêta. — Lorsque l'on veut étudier des particules élémentaires, on s'adresse à leurs propriétés intrinsèques tels que charge, masse, spin... C'est ainsi que pour l'analyse de l'émission bêta ⁽²⁾, qui permet la détermination des niveaux d'énergie en jeu, de leurs parité et moment angulaire total, on utilisera le fait que la particule bêta est chargée électriquement et douée d'une masse m ; elle sera donc déviée dans le champ magnétique d'un solénoïde court. L'appareil est schématisé dans la figure 1.

Les trajectoires décrites par les particules se calculent par deux méthodes différentes : ou bien on s'appuie sur l'analogie avec l'optique géométrique d'un milieu à indice de réfraction à variation continue (méthode numérico-graphique), ou bien, comme nous l'avons fait, on considère le problème comme ressortissant à la dynamique classique et on emploie le formalisme hamiltonien qui lui est propre.

Appellant H_{oz} la composante axiale, en un point z de l'axe du solénoïde du champ H , et r la distance de la particule à l'axe, l'équation

- ① Source
- ② Baffle d'ouverture
- ③ Baffle de plomb
- ④ Baffle annulaire

- ⑤ Baffle de sortie
- ⑥ Cristal scintillateur
- ⑦ Light piping

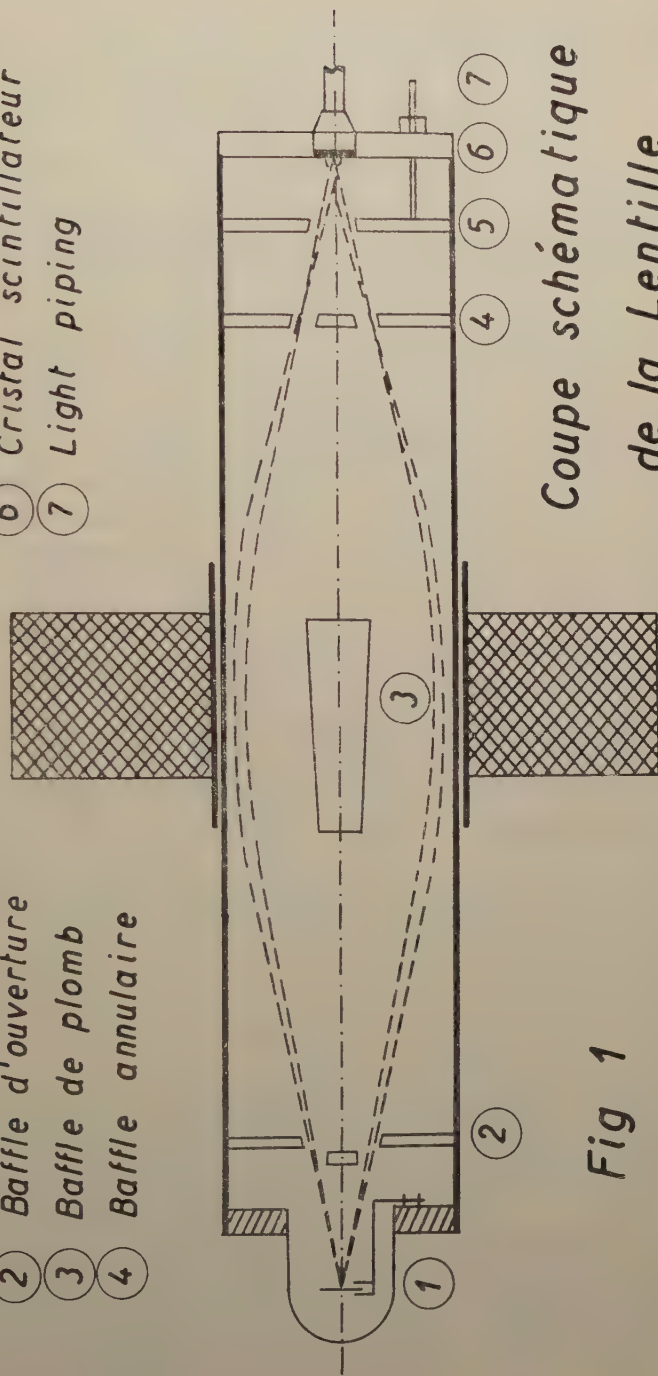


Fig 1

Coupe schématique
de la Lentille

déterminant les trajectoires au premier ordre (rayons paraxiaux) dans le plan méridien s'écrit :

$$\frac{d^2\gamma}{dz^2} + 4 \frac{H_{oz}^2 \gamma}{k^2} = 0$$

où k représente le rapport p/I du moment de l'électron au courant générateur du champ magnétique; le fait de fixer le point de départ (source), d'arrivée (détecteur) et l'angle d'émission (premier baffle) d'une particule, fournit la valeur du paramètre de cette équation. Dès lors, la mesure d'une énergie se réduit à celle d'un courant par l'intermédiaire d'un étalonnage. Le pouvoir focalisant d'un tel système apparaît d'ailleurs dans l'homogénéité de l'équation qui admet l'existence d'une infinité de trajectoires avec même point de départ et d'arrivée, justifiant ainsi l'analogie avec une lentille optique. Lorsqu'on pousse l'approximation jusqu'au troisième ordre et que l'on calcule point par point les trajectoires, on observe que les aberrations ainsi introduites produisent une focalisation annulaire (fig. 1) appliquée pour la première fois à une lentille longue par Frankel (3). Alors que dans la focalisation au premier ordre, la transmission du spectromètre est inversement proportionnelle à la résolution, celle du troisième ordre donne une transmission inversement proportionnelle au carré de cette dernière. C'est ainsi que pour une même résolution, le spectromètre que nous avons construit, tout en étant du même type que celui de Deutsch (4), montre les caractéristiques suivantes :

	Focalisation	Angle d'émission	Résolut. %	Transmiss. %	Luminosité 10 ³ cm ²
DEUTSCH	axiale	6,3	5,4	0,19	3,9
LOUVAIN	annulaire	10,3	5,5	1	15

Le champ H du spectromètre est engendré par un solénoïde court de section rectangulaire ($13,5 \times 15$ cm); ce dernier est formé de 3.820 tours de fil de cuivre de 2 mm de diamètre et d'un poids global de 120 Kg. La composante H_{oz} du champ au centre du spectromètre est de 1.250 gauss pour un courant I maximum de 10 ampères. La position du baffle de focalisation annulaire a été déterminée par la recherche numérique de quelques trajectoires de l'équation au 3^{me} ordre; l'expérience a confirmé la bonne approximation de nos calculs.

Etude du rayonnement gamma. — Employant toujours le même appareillage, la mesure des spectres de raies gamma se fait indirectement par celle de l'énergie des électrons de conversion soit interne comme dans le cas Cs137, soit externe dans un radiateur de plomb. On prendra d'ailleurs une raie bien connue pour l'étalonnage du spectromètre.

Le type de radiation en jeu dans l'émission gamma, le changement de parité et de moment angulaire total, se déterminent par plusieurs procédés. Un premier classement est établi par la connaissance du temps de vie du niveau excité d'où est émis le gamma d'environ 1 Mev d'énergie; suivant que ce temps est de l'ordre de 10^{-12} , 10^{-8} ou 10^{-3} sec. on aura généralement des radiations électriques, dipolo- ou quadrupolaires, octupolaires et 2^4 polaires. Un deuxième groupe de renseignements est fourni, depuis ces dernières années, par l'étude de la fonction de corrélation angulaire, lorsque le gamma coïncide avec toute autre émission.

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX.

Spectre du bêta mou du Cs137. — Celui-ci quoique déjà mesuré dans plusieurs travaux, semble donner des résultats assez contradictoires pour l'énergie maximum du spectre. Une source de 100 μ C de CsCl était déposée en une couche mince de 0,10 mg par cm^2 , pour minimiser toute erreur, et recouverte d'une mince pellicule d'aquadag, pour éliminer toute charge statique de la source.

L'étalonnage s'est fait avec la raie de conversion interne bien connue depuis la communication de Siegbahn au Congrès d'Amsterdam (septembre 1952).

$$\begin{array}{l} \text{Cs137 Conversion K} \quad 3381,28 \pm 0,5 \text{ Gauss-cm.} \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad 661,65 \pm 0,15 \text{ KeV.} \end{array}$$

La courbe de Kurie, après correction pour tenir compte de la déformation de l'onde de Broglie représentative de la particule bêta dans le champ du noyau ne donne pas la droite prévue dans la théorie primitive.

Elle est obtenue après correction par un facteur caractéristique des transitions une fois défendue (fig. 2).

Le point d'énergie maximum est repris dans le tableau I ci-après avec les résultats principaux de la littérature.

TABLEAU I

Auteur	Année	E max. Lev
A. C. E. C.	1947	840
Townsend	1948	550
Langer-Price	1949	510 ± 10
Peacock-Mitchell	1949	521
Waggoner	1950	518
Wu	1950	530
Agnew	1950	523 ± 4
Langer-Moffat	1951	510
Louvain	1953	526 ± 5

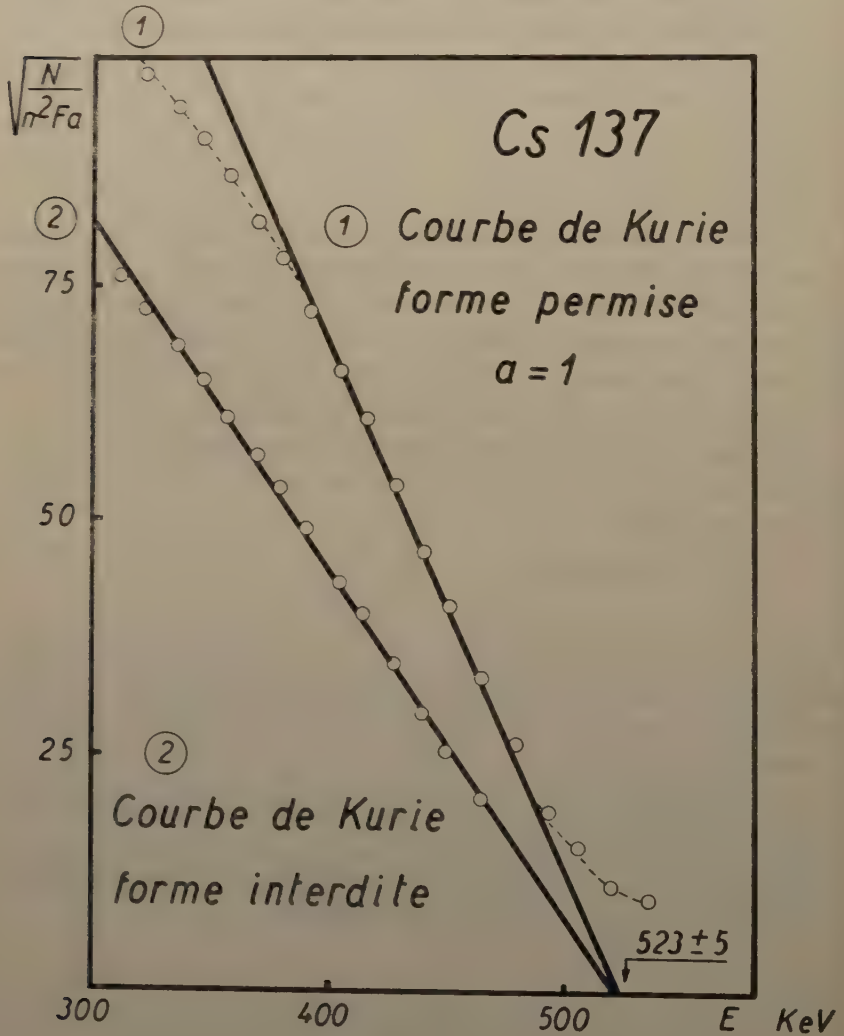


Fig 2

Spectre nucléaire du Rb86. — Le spectre du bêta dur (fig. 3) du Rb86 a fait l'objet de la même étude que celui du Cs137. Il présente la même forme une fois défendue et dès lors, il y a entre les niveaux 1 et 3 changement de deux unités pour le moment angulaire total et changement de signe pour la parité. La forme semble donc confirmer le résultat publié par Ridgway en 1950 (5).

Le point maximum du bêta mou a également été mesuré. Donc la détermination de l'énergie du gamma doit permettre un contrôle des résultats, par la fermeture du triangle dressant le bilan énergétique (table III) — (fig. 3).

Les spectres bêta ont été mesurés avec une source de 0,5 mg/cm² de RbCl déposée sur mica; la source possédait une activité spécifique de 20 μ C par gramme. L'énergie du gamma a été déterminée par conversion dans une feuille de plomb de 31 mg/cm²; la perte d'énergie due à l'énergie de liaison de l'électron de conversion ainsi qu'au freinage de cet électron dans le radiateur, a été déterminée expérimentalement à partir de la raie d'annihilation (511 kev) du positron émis par le Co56; le premier gamma du Co56 mesuré à partir de cet étalonnage donne d'ailleurs 846 ± 8 kev, à comparer avec le seul résultat publié à ce jour (table II).

TABLEAU II

Auteur	Année	E (KeV)
Deutsch	1943	845 ± 15
Louvain	1953	846 ± 8

A partir de cet étalonnage, on a déterminé l'énergie du gamma Rb86.

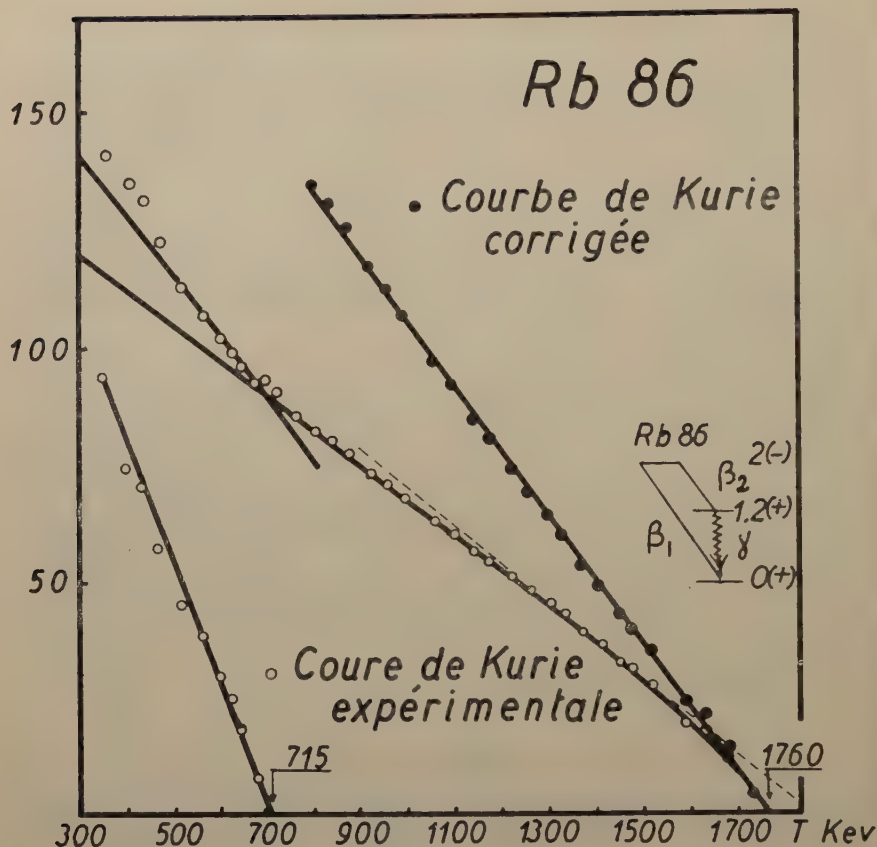


Fig 3

TABLEAU III

Auteur	Année	E_{β_2} (Kev)	E_{γ} (Kev)	$E_{\beta_2} + E_{\gamma}$	E_{β_1} (Kev)
Helmholz	1941	—	—	—	1560 \pm 50
Haggstrom	1942	—	—	—	1600 \pm 30
Zaffarano-Mitchell	1948	716 \pm 20	1081	1797	1822 \pm 14
Jurney	1948	560	—	—	1800
Muether-Ridgway	1950	714 \pm 10	1076 \pm 3	1790	1800 \pm 10
Macklin-Wu	1951	670 \pm 5	—	—	1760 \pm 10
Palmer	1951	670 \pm 100	—	—	—
Louvain	1953	715 \pm 20	1055 \pm 4	1770 \pm 25	1760 \pm 9

Connaissant ainsi les énergies des différents niveaux, il reste à en estimer les moment angulaire total et parité. Le spin du niveau fondamental du Sr86 est zéro d'après les lois empiriques d'ailleurs expliquées par le modèle nucléaire en couches, et le niveau est pair; dès lors le niveau fondamental du Rb86 aura un spin 2 et sera impair. Nous avons également mesuré le temps de vie du niveau intermédiaire; il est certainement inférieur à 10^{-9} seconde. Une dernière détermination du coefficient angulaire bêta-gamma intégrée (table IV), quoique d'interprétation difficile, conduit à attribuer au spectre nucléaire du Rb86 les constantes résumées dans la fig. 3; on aura soit une émission quadrupolaire électrique ($\Delta J = 2$ sans changement de parité), soit une émission dipolaire magnétique ($\Delta J = 1$ sans changement de parité.)

TABLEAU VI

Auteur	Année	
Novey	1950	$0,035 \pm 0,02$
Frankel	1950	$-0,094 \pm 0,015$
Deutsch	1951	0,13
Louvain	1953	$0,14 \pm 0,04$

Nous ne voudrions pas terminer sans exprimer toute notre reconnaissance à Monsieur le Professeur M. de Hemptinne sous la direction duquel a été réalisé le présent travail, ainsi qu'à Monsieur le Docteur G. Tavernier, pour les conseils éclairés qu'il nous a donnés.

BIBLIOGRAPHIE

1. P. MACQ : Mémoire de Lic. en Sc. Phys.
2. BLATT & WEISSKOPF : *Theoretical Nuclear Physics* — Wiley.
3. FRANKEL : *Phys. Rev.* 73-804-1948.
4. DEUTSCH-ELLIOT and EVANS : *Rev. Sc. Inst.* 15-178-1944.
5. MUETHER and RIDGWAY : *Phys. Rev.* 80-750-1950.

Contrôle par thyratrons de l'alimentation en courant continu de l'amplificateur 100 Kw du cyclotron

L'intensité du faisceau d'ions accélérés dans un cyclotron non-modulé est dans une très large mesure proportionnelle à la différence de potentiel haute fréquence appliquée entre les dees. Il faut essayer d'accélérer les ions en un nombre de révolutions aussi restreint que possible afin d'éviter leur déperdition par oscillations transversales, car il n'est pas permis de conserver le faisceau en bonne position, en faisant appel à une intense focalisation magnétique, utilisée dans les cyclotrons modulés.

L'installation d'un déflecteur exige aussi un accroissement de rayon de la trajectoire circulaire des ions, de plus de 2 mm par tour.

L'obtention de cette différence de potentiel requiert une puissance haute fréquence considérable, qui varie de 50 à 150 KW. H.F. d'après les caractéristiques du circuit résonnant que forment les dees et leurs lignes quart d'onde. Différents types d'amplificateurs sont utilisés pour fournir cette énergie : leur puissance nominale varie entre 50 et 200 KW.

L'utilisation de telles puissances H. F. exige des dispositifs de contrôle et de sécurité parfois fort importants.

Il faut prévoir un moyen de coupure très rapide de l'alimentation de l'amplificateur lors de surintensité dans les tubes de puissance ou lors d'accidents, tel une rentrée d'air dans la chambre du cyclotron.

Il est, de plus, généralement requis de pouvoir varier de façon continue la puissance injectée dans le cyclotron dans une très large mesure : de 20 à 100 % de la puissance nominale. Cette grande latitude de réglage ne peut s'opérer complètement par simple changement du couplage H. F. et nous avons trouvé extrêmement commode d'alimenter en courant continu l'amplificateur de puissance fournissant la haute-fréquence au cyclotron, par un redresseur à sortie variable de façon continue de 3 à 17 KV avec une intensité maximale de 20 A à tout régime de tension.

Une tension de sortie variable peut s'obtenir pour un redresseur à phanotrons en changeant la tension d'entrée alternative : ce dispositif exige un transformateur variac, très onéreux et difficile à réaliser pour une puissance nominale du transformateur de 350 KVA.

Il nous a été possible d'obtenir une tension de sortie variable du redresseur utilisant un transformateur à tension de sortie fixe et un redresseur à thyratrons avec commande de grille par impulsions.

Les thyratrons sont de construction Brown-Boveri (Baden-Suisse) du type T.Q.7 et étaient les seuls redresseurs de cette classe à grille de commande sur le marché en 1950.

Le schéma de ce redresseur est donné en Fig. 1.

Les caractéristiques des thyratrons sont telles que l'arc ne peut s'amorcer lorsque la plaque est positive (prenant le potentiel de la cathode égal à zéro) si le potentiel de la grille est inférieur à -20 V. pour une température ambiante de 30° et une tension anodique de pointe de 18 KV.

L'arc s'amorcera certainement lorsque la tension grille sera élevée à $+10$ V. La tension critique d'amorçage entre ces deux tensions grille n'est pas toujours bien définie, aussi convient-il pour préciser l'allumage du thyatron de transférer la grille de sa polarisation négative à une polarisation positive aussi rapidement que possible.

L'arc, une fois amorcé, reste allumé tant que la plaque est positive, quel que soit le potentiel de la grille. Il s'éteint lorsque la tension plaque s'annule et restera nécessairement éteint durant la demi-période où la plaque est négative.

On voit qu'en différant le moment d'allumage du thyatron dans la demi-période où il peut conduire, on dispose d'un réglage du débit et de la tension du thyatron, et l'on peut ainsi varier la tension de sortie du redresseur dans son ensemble.

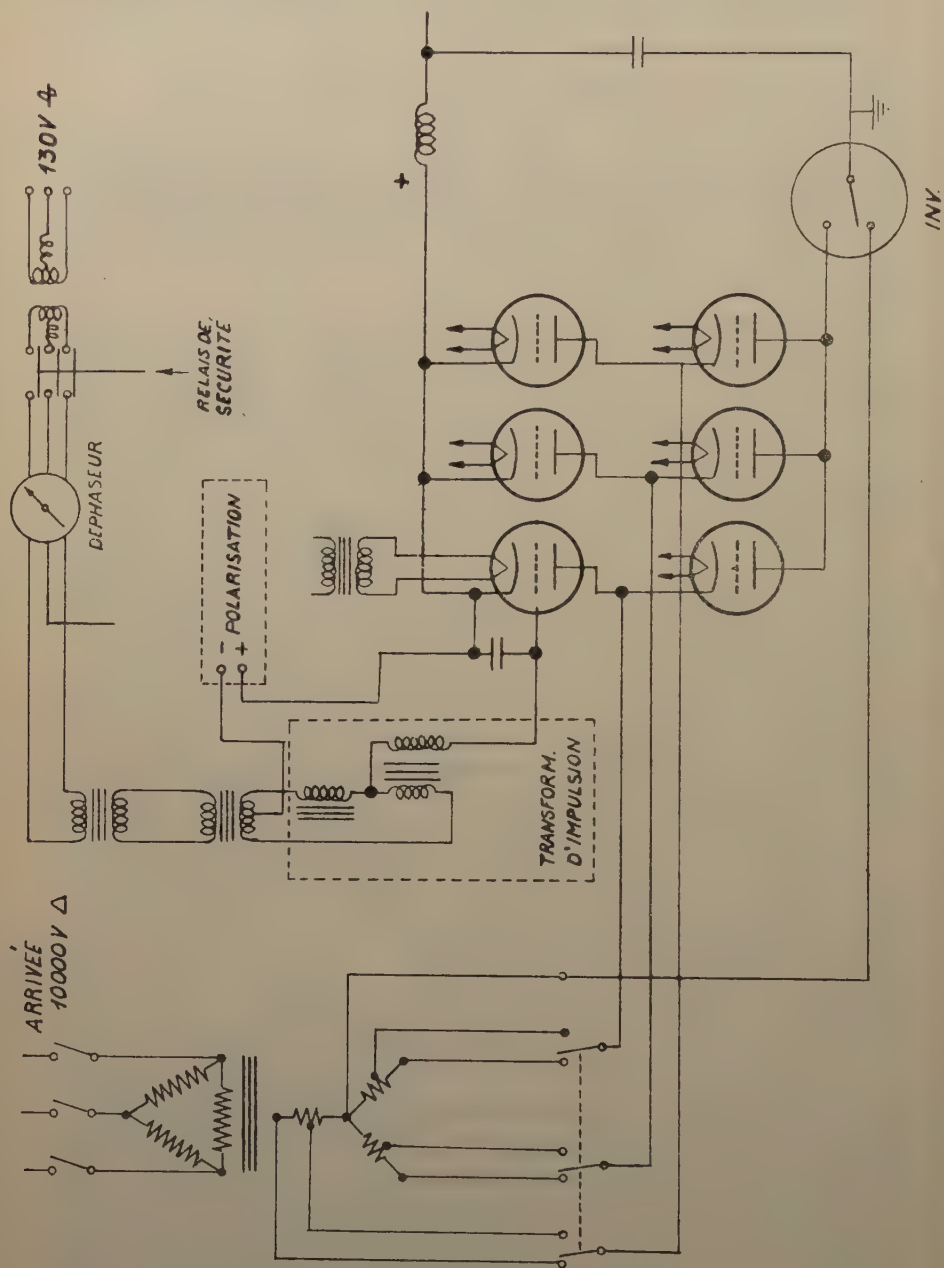
Il y a différents moyens de contrôler le moment d'allumage du thyatron :

1° On polarise à -20 V et l'on supprime cette polarisation en temps voulu.

2° On polarise à -20 V et l'on superpose à cette polarisation un signal alternatif, de même fréquence que celle de la tension anodique, soit d'amplitude variable, soit de phase variable.

3° On polarise à -20 V et l'on superpose des impulsions de même fréquence que celle de la tension anodique déplaçables dans la phase.

Cette dernière méthode présente l'avantage de déterminer d'une façon extrêmement précise le moment d'allumage du thyatron et



d'éviter toute polarisation positive de la grille lorsque la plaque est négative.

La construction d'un redresseur à thyatron à commande par impulsion ne comporte comme éléments spéciaux que les transformateurs d'impulsion et le déphaseur.

Nous avons cherché à rendre notre équipement aussi robuste que possible afin d'en augmenter la sécurité et avons choisi un déphaseur à déplacement mécanique, de fabrication Siemens, comportant deux enroulements triphasés déplaçables dans le champ d'un enroulement triphasé. Les deux enroulements mobiles sont décalés de 180° .

Leur position angulaire dans l'enroulement fixe détermine la différence de phase entre les champs triphasés.

Comme il était difficile de trouver sur le marché des transformateurs d'impulsion qui répondent à nos besoins, nous en avons construits au laboratoire.

Un transformateur d'impulsion est essentiellement un dispositif recevant à son entrée une tension sinusoïdale et rendant à sa sortie une ou plusieurs impulsions à front raide pour chaque cycle de la tension d'entrée.

Si nous appliquons au primaire d'un transformateur ordinaire un courant croissant, le flux magnétique dans le noyau de fer sera la réplique exacte du courant primaire, et la force électromotrice induite au secondaire sera proportionnelle à l'accroissement de flux.

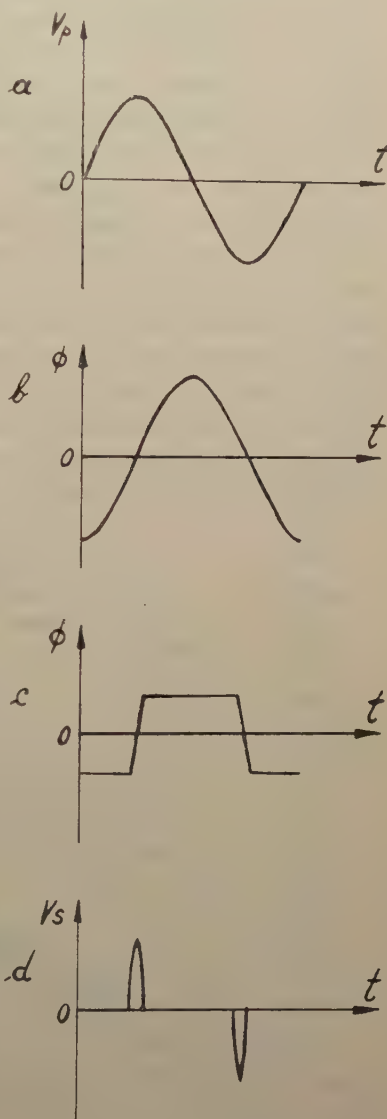


FIG. 2

En augmentant le courant au primaire, nous allons, à partir d'une certaine intensité, saturer le circuit magnétique : à une augmentation de courant il ne correspondra plus d'augmentation de flux et partant plus de force électromotrice induite au secondaire. La figure 2 donne les courbes caractéristiques du courant au primaire, du flux et de la tension au secondaire avant et au delà de la saturation.

Cette forme simple de transformateur d'impulsion présente deux grands inconvénients :

1^o Dès le moment où le noyau magnétique est saturé, l'impédance du circuit primaire se réduit à sa résistance ohmique et le courant aura tendance à augmenter fortement dans cet enroulement. Il en résultera un échauffement souvent anormal de l'enroulement ainsi qu'une notable consommation d'énergie.

Il faudra limiter le courant au primaire par une impédance extérieure.

2^o La perméabilité des tôles d'un transformateur normal est faible et la saturation magnétique n'est atteinte que pour une force magnétomotrice considérable.

Il est donc nettement préférable d'utiliser pour le noyau d'un transformateur à impulsion un matériau à grande perméabilité magnétique. La fig. 3 donne les courbes de perméabilité pour diffé-

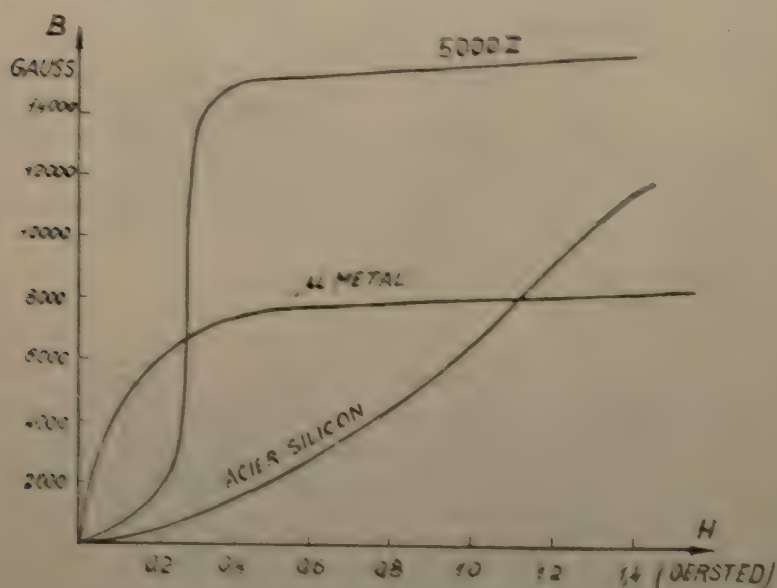


FIG. 3

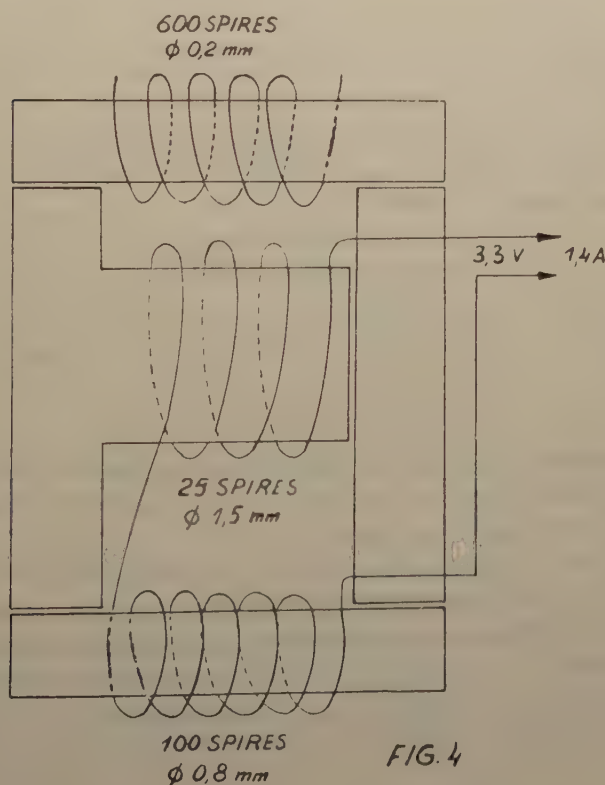
rents matériaux. On voit combien les matériaux tel le 5003 Z atteignent rapidement la saturation.

Nous avons fait différents essais avec un noyau de 5003 Z en forme de tore et une impédance série dans le primaire soit ohmique, soit inductive, soit capacitive. Différentes formes d'impulsions peuvent ainsi être obtenues; cependant les matériaux employés dans ces transformateurs nous obligeaient à utiliser une puissance de 50 VA au primaire, ce que nous trouvions trop élevé.

Il nous a été possible de réaliser un autre type de transformateur à impulsion en prenant un circuit magnétique représenté en fig. 4. Ce circuit est en tôles ordinaires à l'exception de la traverse supérieure formée uniquement de permalöid.

Le primaire est bobiné sur la traverse centrale du noyau. La traverse supérieure porte l'enroulement secondaire. Un bobinage en série avec le primaire est enroulé sur la traverse inférieure.

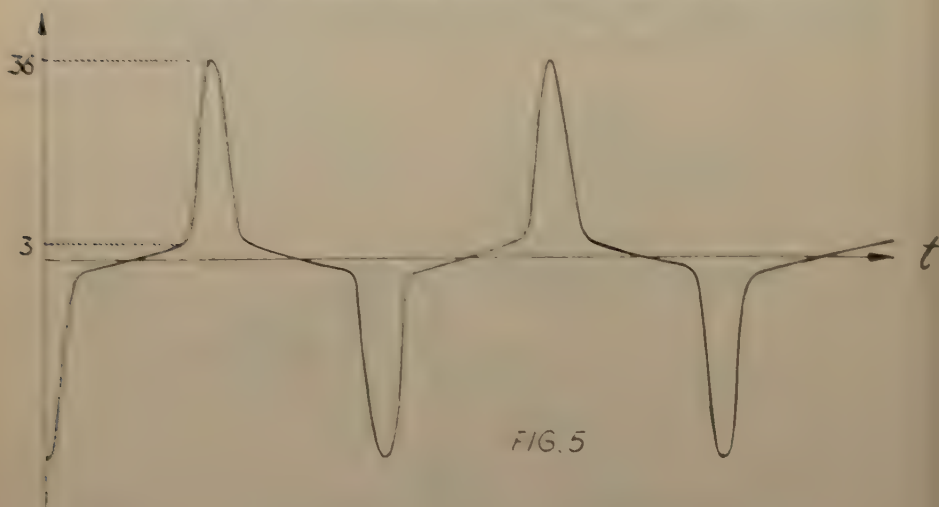
Lors de l'application d'un courant alternatif au primaire, le flux augmente très rapidement dans la branche en permalöid et atteint



la saturation : cette croissance rapide engendre l'impulsion dans le secondaire. L'impédance du primaire reste encore élevée après la saturation du permaloid car le flux peut croître normalement dans la branche inférieure du circuit magnétique.

On augmente encore la rapidité de l'accroissement du flux dans la branche supérieure en créant un léger entrefer dans la branche inférieure, ce qui dérive la presque totalité du flux initial à travers le permaloid. La valeur de cet entrefer ainsi que les caractéristiques du bobinage complémentaire placé sur la branche inférieure permettent de modifier dans une large mesure la forme de l'impulsion.

Les transformateurs que nous avons construits pour la commande des grilles des thyatrons T.Q.7 de notre redresseur consomment au primaire 4,6 VA et fournissent aux bornes d'un secondaire de 600 tours une impulsion de 36 Volts avec une sinusoïde résiduelle de moins de 5 volts. Ces impulsions sont représentées en fig. 5.



Le dispositif de commande de grille que nous avons réalisé permet de régler la tension de sortie du redresseur de manière continue entre 20 et 100 % de la valeur maximale.

Nous disposons, de plus, d'un moyen de coupure de la haute tension fournie par le redresseur, extrêmement rapide. Il suffit en effet d'interrompre l'alimentation des transformateurs d'impulsion pour bloquer instantanément le redresseur : les thyatrons allumés achèvent leur demi-période, et aucun thyatron ne s'allume à nouveau. On obtient ainsi une coupure en moins d'une demi période et cette coupure

s'effectue par un circuit ne débitant que quelques V.A. Elle peut donc se faire par un relai léger, sensible et à action très rapide nous avons utilisé un relai Westinghouse modifié, dont l'armature ne pèse que quelques grammes.

Conclusion :

L'alimentation de l'amplificateur haute fréquence par un redresseur à thyratrons commandés par impulsion s'est avéré être une solution particulièrement élégante des problèmes de réglage et de sécurité que l'on rencontre dans l'installation de la haute fréquence pour un cyclotron non-modulé.

La grande simplicité du dispositif, son coût minime, l'étendue de la bande de réglage semblent inégalées dans cette classe de redresseurs.

Notes :

Nous attirons l'attention sur deux points particuliers de ce redresseur :

A. Lorsque l'on désire avoir une tension de sortie du redresseur composante alternative résiduelle aussi faible que possible pour un filtre donné, il convient en régime permanent d'ouvrir les thyratrons durant une assez large partie de la demi période où ils peuvent conduire, par exemple entre 60 et 100 % de cette demi-période. Afin de réaliser cette condition pour différentes tensions de sortie du redresseur nous en avons prévu l'emploi à deux régimes différents :

1° en redresseur « full wave » de Graetz à six tubes donnant une tension de crête redressée de $2 E_0$.

2° en redresseur « half wave » triphasé, utilisant trois tubes seulement et donnant la tension de crête redressée E_0 .

Le passage du premier régime au second se fait très aisément par simple commutation de l'inverse Inv. de la fig. 1 et par la suppression des impulsions des trois thyratrons inutiles, qui sont bloqués par cette simple coupure.

Nous avons d'autre part prévu deux sorties triphasées dans notre transformateur de 350 KVA qui alimente le redresseur donnant des tensions phase-neutre de 6 KV et 8.5 KV.

Nous disposons donc de quatre régimes maximum de tension résumés dans la table :

Trans- formateur	Redresseur	Réglage possible	Réglage à faible composante résiduelle
6 KV	3 tubes	1.2 à 6 KV	4 à 6 KV.
8.5 KV	3 »	1.7 à 8.5 KV	6 à 8.5 KV.
6 KV	6 »	2.5 à 12 KV	8.5 à 12 KV.
8.5 KV	6 »	3.5 à 17 KV	12 à 17 KV.

B. Il faut éviter soigneusement d'avoir des tensions en haute fréquence induites sur les grilles des thyratrons qui pourraient provoquer des allumages intempestifs de ceux-ci : aussi est-il nécessaire de blinder les transformateurs d'impulsion, dont le permaloïd est particulièrement sensible. Il s'est avéré fort utile de placer entre la grille des thyratrons et leur cathode un petit condensateur de $0.01 \mu\text{F}$, qui constitue un découplage efficace pour les impulsions parasites qui apparaissent entre la grille et le filament et n'atténue pas notablement l'impulsion de commande du thyatron.

Nous tenons à remercier spécialement F. Poelmans qui a développé et mis au point les transformateurs d'impulsion que nous avons utilisés.

L. GILLON - Y. HECQ
Louvain Juillet 1952

TABLE DES MATIERES

Manuscrits reçus le 31 janvier 1953

PREMIÈRE SECTION : Séances mathématiques et astronomiques

	PAGES
Sur la géométrie du tétraèdre, par M. V. Thébault	5
Application de la méthode des fonctions majorantes à l'étude de certains systèmes d'équations intégral-différentielles récurrentes, par M. R.H. Germy	13
A propos des fonctions de Bessel à deux variables, par M. P. Humbert.	19
Sur le calcul symbolique à deux variables, par M. N.K. Chakrabarty.	23

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

Potential function for the out of the plane vibrations of C_2H_3Br and its seven deuterated substitutes and the effect of anharmonicity on the calculation, by C. Manneback and A. Rahman	28
---	----

Session du 23 avril 1953, à Bruxelles

PREMIÈRE SECTION : Sciences mathématiques et astronomiques

Sur les intégrales régulières au sens de Fuchs de certains systèmes d'équations différentielles, par M. R. H. Germy	69
Sur la résolution des équations par la méthode de Lin, par M. F. Ceschino	77
Sur le calcul symbolique à n variables et sur les fonctions hyperbesséliennes, par M. P. Delerue	83

DEUXIÈME SECTION : Sciences physiques et chimiques

Spectre infra-rouge à grande dispersion de $CH_2D - CH_2D$, par MM. R. Van Riet, C. Courtoy et M. de Hemptinne	105
Spectre infra-rouge à grande dispersion des $C_2H_2D_2$ cis et trans, par MM. J. Charette, C. Courtoy et M. de Hemptinne	122
Potential function for the vibrations of $H_2C = CBr_2$, $HDC = CBr_2$, $D_2C = CBr_2$, by C. Manneback and A. Rahman	140

Session du 29 octobre 1953, à Louvain

PREMIÈRE SECTION : **Sciences mathématiques et astronomiques**

PAGES

Sur des équations intégrodifférentielles récurrentes de forme normale, dont les termes intégraux contiennent les dérivées des fonctions inconnues, par M. R. H. Germay	177
Some basic hypergeometric identities, by R. P. Agarwal	186
Operational calculus with two variables, by N. K. Chakrabarty	203
On some sequences of Laplace transforms, by H. M. Srivastava	218
Sur le calcul symbolique à n variables et les fonctions hyperbesséliennes 2 ^e partie; Fonctions hyperbesséliennes, par M. P. Delerue	229

DEUXIÈME SECTION : **Sciences physiques et chimiques**

Influence de l'anharmonicité sur le calcul de la fonction potentielle des molécules C_2H_4 et H_2O , par MM. Ch. Manneback et A. Rahman	275
Spectre infra-rouge à grande dispersion de $CH_2=CHD$, par MM. Ch. Courtoy et M. de Hemptinne	285
Spectre infra-rouge à grande dispersion de la molécule CD_2H-CD_2H , par MM. R. Van Riet, Ch. Courtoy et M. de Hemptinne	296
Quelques résultats sur les spectres nucléaires du Rb86 et du Cs137, par M. P. Macq	309
Contrôle par thyatron de l'alimentation en courant continu de l'amplificateur 100 Kw du cyclotron, par MM. L. Gillon et Y. Hecq	318
Table des matières du volume 67 ^e	327

AUTEURS

R. P. Agarwal, 186. — F. Ceschino, 77. — N. K. Chakrabarty, 23, 203. — J. Charette, 122. — Ch. Courtoy, 105, 122, 285, 296. — P. Delerue, 83, 229. — R. H. Germay, 13, 69, 177. — L. Gillon, 318. — Y. Hecq, 318. — M. de Hemptinne, 105, 122, 285, 296. — P. Humbert, 19. — P. Macq, 309. — Ch. Manneback, 28, 140, 275. — A. Rahman, 28, 140, 275. — H. M. Srivastava, 218. — V. Thébault, 5. — R. Van Riet, 296.

DATES DE PUBLICATION

1^{er} fasc. pp. 1 à 68, 26 mars 1953.

2^e fasc. pp. 69 à 176, 17 juin 1953.

3^e fasc. pp. 177 à 328, 21 décembre 1953.

Revue des Questions Scientifiques

Cette revue, fondée en 1877 par la Société scientifique de Bruxelles, se compose actuellement de cinq séries : la première série comprend 30 volumes (1877-1891); la deuxième, 20 volumes (1892-1901); la troisième, 30 volumes (1902-1921); la quatrième, 30 vol. (1922-1936). La livraison de janvier 1937 inaugure la cinquième série.

La revue fut interrompue par la guerre, après la deuxième fascicule, avril 1940, du tome 117 de la collection. Ce tome fut achevé par les fascicules de février et juillet 1946.

Depuis 1947, paraît chaque année un volume, en quatre fascicules d'environ 160 pages chacun, 20 janvier, 20 avril, 20 juillet, 20 octobre.

Depuis 1947 la Revue est aussi l'organe de l'UNION CATHOLIQUE DES SCIENTIFIQUES FRANÇAIS.

Administration et Rédaction : 11, rue des Récollets, Louvain (Belgique).

PRIX D'ABONNEMENT :

Belgique, Congo belge et Grand-Duché de Luxembourg	200 francs belges
abonnement de soutien	500 francs
abonnement d'honneur	1000 francs
France et Union française (s'adresser à la librairie Masson, 120, boulevard St Germain, Paris 6 ^e)	1400 francs franç.
Autres pays (s'adresser au Secrétariat, à Louvain).....	280 francs belges.

PUBLICATIONS DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE

EXTRAIT DU CATALOGUE

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,
t. I à XLVI, 1875 à 1926. Chaque vol. in-8° de 400 à 600 pages fr. 150,00

ANNALES DE LA SOCIÉTÉ SCIENTIFIQUE DE BRUXELLES,

Série A (sc. mathématiques), t. XLVII à t. LVI (1927 à 1936) fr. 70,00

Série B (sc. physiques et naturelles) " fr. 70,00

Série C (sc. médicales) (1927 et 1928) fr. 100,00 — (1929 à 1933) fr. 40,00

(1931 à 1936) fr. 20,00

Série D (sc. économ. et techniques) (1927 à 1929) fr. 20,00 — (1930) fr. 60,00

(1931 à 1936) fr. 100,00

Série I (sc. mathématiques et physiques), tt. LVII à LXVII (1937 à 1953) fr. 70,00

Série II (sc. naturelles et médicales), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) fr. 70,00

Série III (sc. économiques), tt. LVII à LX (1937 à 1940, 46) . . fr. 100,00

REVUE DES QUESTIONS SCIENTIFIQUES,

t. I à XCII (1877 à 1927). Les deux volumes annuels . . . fr. 200,00

Le fascicule trimestriel . . . fr. 60,00

t. XCIII à CXVI (1928 à 1939). Les deux volumes annuels. . fr. 200,00

Le fascicule . . . fr. 40,00

t. CXVII (1940 et 1946), tt. CXVIII à CXXIV (1947 à 1953) Le volume fr. 200,00

Le fascicule . . . fr. 60,00

TABLES ANALYTIQUES DES ANNALES,

t. I à XXV (1875 à 1901) . . . fr. 20,00

t. XXVI à XLVI (1902 à 1926) . . . fr. 40,00

TABLES ANALYTIQUES DE LA REVUE.

t. I à L (1877 à 1901) . . . fr. 20,00

t. LI à LXXX (1902 à 1921) . . . fr. 20,00

t. LXXXI à CX (1922 à 1936) . . . fr. 30,00

MONOGRAPHIES DE SCIENCES NATURELLES

I. — B. Tougarinoff. Les réactions organiques dans l'analyse qualitative minérale (cations). — Un vol. in-8° de 107 pages (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, 30,00 fr.

II. — V. Schaffers. Le paratonnerre et ses progrès récents. Un vol. in-8° de 90 pages (1931) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays fr. 30,00.

IV. — F. Kalsin et E. de Pierpont. — Hydrogéologie des Calcaires de la Belgique. Un vol. in 8° de 111 pages, avec 35 fig. et un plan hors texte (1939) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00. (épuisé)

MONOGRAPHIES MEDICALES

I. — M. Schillings. Le rein en fer à cheval. Un vol. in-8° de 104 pages, avec 8 planches hors-texte (1928) : en Belgique, fr. 70,00; autres pays, fr. 90,00.

III. — P. Van Gehuchten. La pathologie du système pallido-strié. Un vol. in-8° de 52 pages, avec 8 planches hors-texte (1930) : en Belgique, fr. 24,00; autres pays, fr. 30,00.

MONOGRAPHIES DES SCIENCES ECONOMIQUES

I. — A. Henry. La structure technique de l'agriculture belge et ses particularités en Wallonie et en Flandre. Un vol. de 66 pages . . . fr. 20,00

II. — A. Henry. Les variations régionales de l'Agriculture en Belgique. Un vol. de 50 pages . . . fr. 10,00

III. — A. Delpérée. La réglementation conventionnelle des conditions de travail en Belgique. Un vol. de 200 pages . . . fr. 60,00